

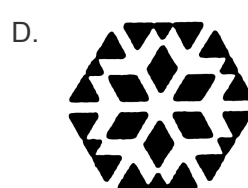
第1讲 旋转的概念及性质练习

一、旋转与中心对称

练习1

1. 2020~2021学年天津南开区初三上学期期中第2题3分 ★★

下列图案中，既是中心对称图形又是轴对称图形的是（ ）。



【答案】 D

【解析】 A 选项：不是中心对称图形，但是轴对称图形，故 A 不正确。

B 选项：既不是轴对称图形，又不是中心对称图形，故 B 不正确。

C 选项：是中心对称图形，但不是轴对称图形，故 C 不正确。

D 选项：既是中心对称图形，又是轴对称图形，故 D 正确。

故选 D。

【标注】 【知识点】 判断轴对称图形和中心对称图形

2. 2018~2019学年江苏无锡惠山区初二下学期期末第1题3分 ★

下列标志图中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）。



C.

D.



【答案】 B

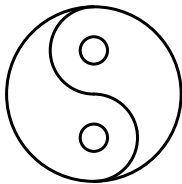
【解析】 选项 A 是中心对称图形不是轴对称图形，
选项 C 是轴对称图形不是中心对称图形，
选项 D 既不是轴对称图形也不是中心对称图形．

【标注】 【知识点】 判断轴对称图形和中心对称图形

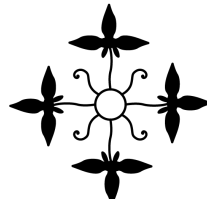
3. 2020~2021 学年 3 月江苏南京雨花台区南京外国语学校雨花国际学校初二下学期月考第 1 题 2 分 ★

民族图案是数学文化中的一块瑰宝．下列图案中，既不是中心对称图形也不是轴对称图形的是（ ）．

A.



B.



C.



D.



【答案】 C

【解析】 A 选项：是中心对称图形，不是轴对称图形，故本选项不合题意，故 A 错误；
B 选项：既是中心对称图形，也是轴对称图形，故本选项不合题意，故 B 错误；
C 选项：既不是中心对称图形也不是轴对称图形，故本选项符合题意，故 C 正确；
D 选项：不是中心对称图形，是轴对称图形，故本选项不合题意，故 D 错误．
故选 C．

【标注】 【知识点】 判断轴对称图形和中心对称图形

4. 2021年天津和平区初三中考一模第4题3分 ★

下列图形中，可以看作是中心对称图形的是（ ）.



【答案】 A

【解析】 A 选项：是中心对称图形，所以本选项符合题意，正确.

B 选项：不是中心对称图形，所以本选项不符合题意，错误.

C 选项：不是中心对称图形，所以本选项不符合题意，错误.

D 选项：不是中心对称图形，所以本选项不符合题意，错误.

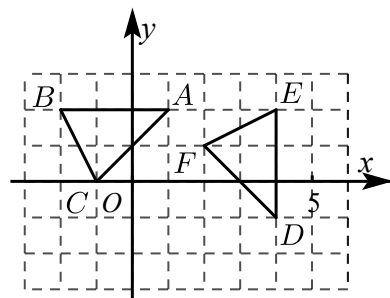
故选 A.

【标注】 【知识点】 中心对称图形的定义

练习2

5. ★★

如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $\triangle ABC$ 顶点的横、纵坐标都是整数. 若将 $\triangle ABC$ 以某点为旋转中心，顺时针旋转 90° 得到 $\triangle DEF$ ，则旋转中心的坐标是（ ）.



- A. (0,0) B. (1,0) C. (1,-1) D. (2.5,0.5)

【答案】 C

【解析】 $\because$ 将 $\triangle ABC$ 以某点为旋转中心，顺时针旋转 90° 得到 $\triangle DEF$ ，

$\therefore$ 点 A 的对应点为点 D，点 B 的对应点为点 E，

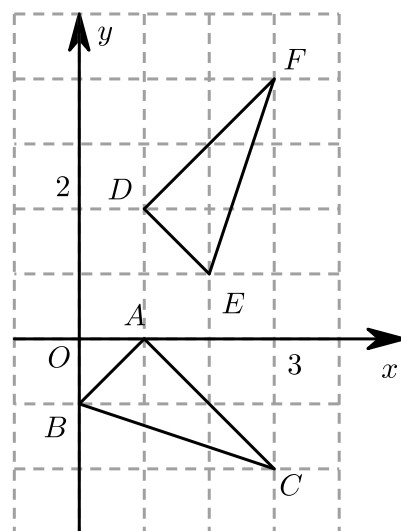
作线段 AD 和 BE 的垂直平分线，它们的交点为 $P(1, -1)$ ，

∴旋转中心的坐标为 $(1, -1)$.

故选 C .

6. 2016~2017学年北京西城区北师大附中初二下学期期中第5题3分 ★★

如图, $\triangle DEF$ 是由 $\triangle ABC$ 绕着某点旋转得到的, 则这点的坐标是 () .



A. $(1, 1)$

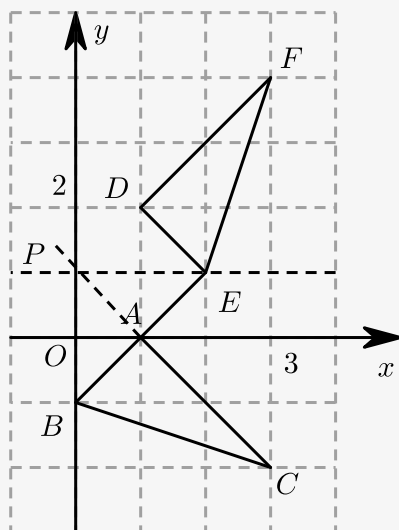
B. $(0, 1)$

C. $(-1, 1)$

D. $(2, 0)$

【答案】 B

【解析】 作线段 AD 、 BE 、 FC 的垂直平分线, 它们相交于点 $P(0, 1)$, 如图,



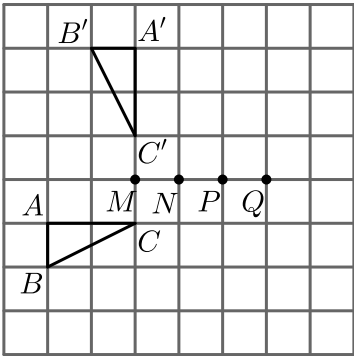
所以 $\triangle DEF$ 是由 $\triangle ABC$ 绕着点 P 逆时针旋转 90° 得到的 .

故选 B .

【标注】 【知识点】 确定旋转中心

7. 2020~2021学年北京西城区北京市第十三中学分校初三上学期期中第6题2分 ★★

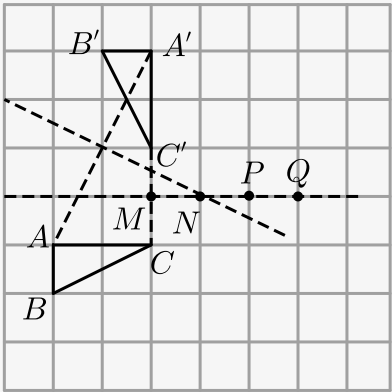
如图，正方形网格中的每个小正方形的边长为1，将 $\triangle ABC$ 绕旋转中心旋转 90° 后得到 $\triangle A'B'C'$ ，其中点 A, B, C 的对应点分别是点 A', B', C' ，那么旋转中心是（ ）。



- A. 点 M
- B. 点 N
- C. 点 P
- D. 点 Q

【答案】 B

【解析】 连接 AA' ， CC' ，作 AA' 、 CC' 的垂直平分线，两直线交于点 N ，它们的交点即为旋转中心，所以旋转中心为点 N 。

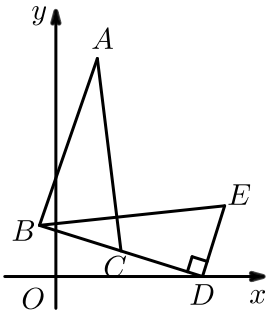


故选 B。

【标注】 【知识点】 确定旋转中心

8. 2016~2017学年天津河东区初三上学期期末第18题3分 ★★★

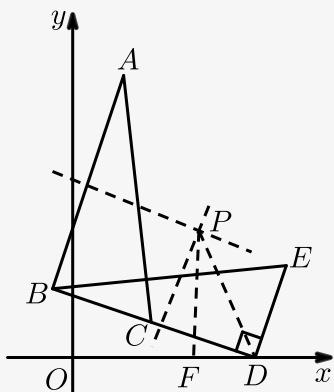
如图，在 $\triangle BDE$ 中， $\angle BDE = 90^\circ$ ， $BD = 6\sqrt{2}$ ，点 D 的坐标是 $(7,0)$ ， $\angle BDO = 15^\circ$ ，将 $\triangle BDE$ 旋转到 $\triangle ABC$ 的位置，点 C 在 BD 上，则旋转中心的坐标为 _____。



【答案】 $(4, 3\sqrt{3})$

【解析】如图， AB 与 BD 的垂直平分线的交点即为旋转中心 P ，

连接 PD ，过 P 作 $PF \perp x$ 轴于 F ，



$\therefore$ 点 C 在 BD 上,

∴点 P 到 AB 、 BD 的距离相等，都是 $\frac{1}{2}BD$ ，

即 $\frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$,

$$\therefore \angle PDB = 45^\circ,$$
$$PD = 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 6 .$$
$$\therefore \angle BDO = 15^\circ,$$
$$\therefore \angle PDO = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ,$$
$$\therefore \angle DPF = 30^\circ,$$
$$\therefore DF = \frac{1}{2}PD = \frac{1}{2} \times 6 = 3.$$

$\therefore$ 点 D 的坐标是 $(7, 0)$,

$$\therefore OF = OD - DF = 7 - 3 = 4.$$

由勾股定理得, $PF = \sqrt{PD^2 - DF^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$,

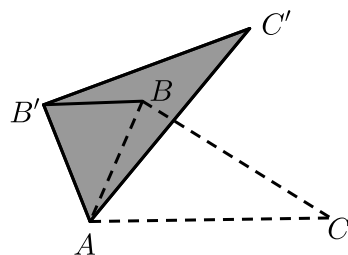
即 P 点的坐标为 $(4, 3\sqrt{3})$.

【标注】 **【知识点】** 旋转性质综合应用

练习3

9. 2019年天津北辰区初三中考二模第9题3分 ★★

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 65^\circ$ ，以点 A 为旋转中心，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转，得 $\triangle AB'C'$ ，连接 BB' ，若 $BB' \parallel AC$ ，则 $\angle BAC'$ 的大小是（ ）。



A. 15° B. 25° C. 35° D. 45° **【答案】** A**【解析】** $\because$ 旋转,

$$\therefore \triangle BA'C' \cong \triangle BAC$$

$$\angle B'AC' = \angle BAC = 65^\circ,$$

$$\because BB' \parallel AC,$$

$$\therefore \angle B'BA = \angle BAC = 65^\circ,$$

$$\because AB' = AB,$$

$$\therefore \angle AB'B = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle B'AB = 180^\circ - 65^\circ \times 2 = 50^\circ,$$

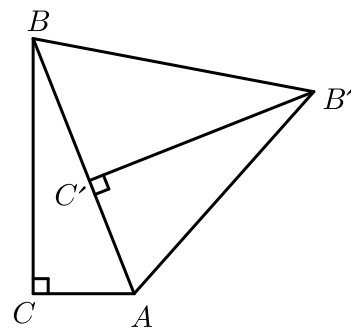
$$\therefore \angle BAC' = 65^\circ - 50^\circ = 15^\circ,$$

故选 A.

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

10. 2020~2021学年3月四川成都锦江区四川师范大学附属中学初二下学期月考第6题3分 ★★

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC = 70^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 70° , B 、 C 旋转后的对应点分别是 B' 和 C' , 连接 BB' , 则 $\angle BB'C'$ 的度数是 ().

A. 35° B. 40° C. 45° D. 50° **【答案】** A**【解析】** $\because AB = AB'$,

$$\therefore \angle ABB' = \angle AB'B = \frac{180^\circ - \angle BAB'}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ,$$

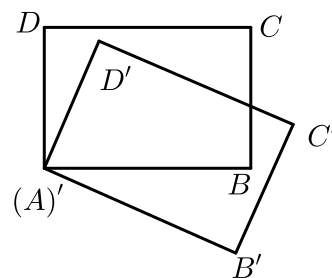
在直角 $\triangle BB'C'$ 中, $\angle BB'C' = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$.

故选 A.

【标注】【知识点】旋转的性质

11. 2014~2015学年天津和平区初三上学期期中 ★★

如图，将矩形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转到矩形 $A'B'C'D'$ 的位置，旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)，若 $\angle BAD' = 70^\circ$ ，则 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ (度)。



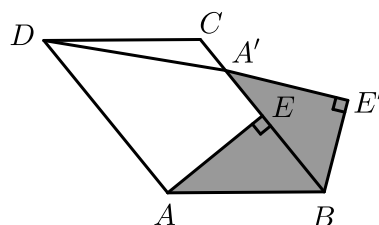
【答案】 20

【解析】 由图可得 $\angle DAD'$ 为旋转角， $\angle DAD' + \angle BAD' = 90^\circ$ ，
 $\therefore \alpha = 20^\circ$ 。

【标注】 【知识点】 旋转性质综合应用

12. 2019~2020学年天津红桥区初三上学期期末第17题3分 ★★★

如图，已知平行四边形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ 于点 E ，以点 B 为中心，取旋转角等于 $\angle ABC$ ，把 $\triangle BAE$ 顺时针旋转，得到 $\triangle BA'E'$ ，连接 DA' 。若 $\angle ADC = 60^\circ$ ， $\angle ADA' = 50^\circ$ ，则 $\angle DA'E'$ 的大小为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (度)。



【答案】 160

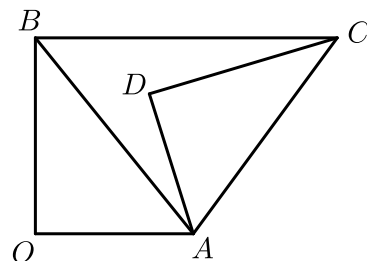
【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $\angle ADC = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle DCB = 120^\circ$ ，
 $\because \angle ADA' = 50^\circ$ ，
 $\therefore \angle A'DC = 10^\circ$ ，
 $\therefore \angle DA'B = 130^\circ$ ，
 $\because AE \perp BC$ 于点 E ，
 $\therefore \angle BAE = 30^\circ$ ，
 $\because \triangle BAE$ 顺时针旋转，得到 $\triangle BA'E'$ ，
 $\therefore \angle BA'E' = \angle BAE = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle DA'E' = \angle DA'B + \angle BA'E' = 160^\circ .$$

【标注】【知识点】旋转的性质

13. 2019~2020学年天津和平区初三上学期期中第8题3分 ★★★

如图，在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中， $\angle O = 90^\circ$ ，以点 A 为旋转中心，把 $\triangle ABO$ 顺时针旋转得 $\triangle ACD$ ，记旋转角为 α ， $\angle ABO$ 为 β ，当旋转后满足 $BC \parallel OA$ 时， α 与 β 之间的数量关系为（ ）。



- A. $\alpha = \beta$ B. $\alpha = 2\beta$ C. $\alpha + \beta = 90^\circ$ D. $\alpha + 2\beta = 180^\circ$

【答案】B

【解析】由旋转知： $AB = AC$ ， $\angle BAC = \alpha$ ，

$$\therefore \angle ABC = \frac{180^\circ - \alpha}{2} ,$$

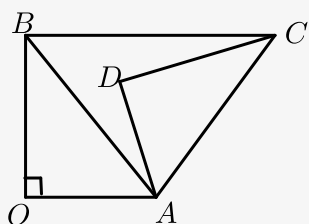
$$\because BC \parallel OA ,$$

$$\therefore \angle OBC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \beta + \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ ,$$

$$\therefore \alpha = 2\beta .$$

故选 B .

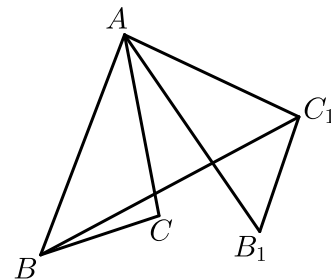


【标注】【知识点】旋转性质综合应用

|| 练习4

14. 2019~2020学年天津河北区初三上学期期中第8题3分 ★★

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 4$ ， $AC = 3$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针旋转 60° 得到 $\triangle AB_1C_1$ ，连接 BC_1 ，则 BC_1 的长为（ ）。



A. 6

B. 5

C. 4

D. 3

【答案】 B

【解析】 将 $\triangle ABC$ 绕 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle AB_1C_1$.

$$\therefore AC = AC_1 = 3, \angle CAC_1 = 60^\circ,$$

$$\because AB = 4, AC = 3, \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC_1 = 90^\circ,$$

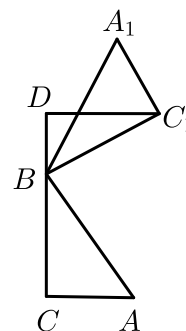
$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BAC_1 \text{ 中, } BC_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

故选 B .

【标注】 【知识点】直接用勾股求边长

15. 2017~2018学年天津滨海新区初三上学期期中第16题3分 ★★

如图, $\triangle ACB$ 中, $BC = 4$, 将 $\triangle ACB$ 绕点 B 逆时针旋转 120° , 得到 $\triangle A_1C_1B$, 过点 C_1 作 $C_1D \perp CB$, 与 CB 的延长线交于点 D , 则 BD 的长等于 _____ .



【答案】 2

【解析】 由旋转可得, $\angle CBC_1 = 120^\circ$, $BC = BC_1 = 4$,

$$\because C_1D \perp BC,$$

$$\therefore \angle BC_1D = 30^\circ,$$

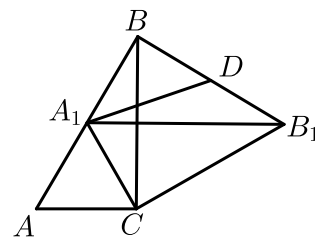
$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC_1 = 2.$$

故答案为: 2 .

【标注】 【知识点】旋转性质综合应用

16. 2017~2018学年江苏无锡宜兴市初三上学期期中周铁学区第10题3分 ★★

如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $AC = 2$ ， $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得 $\triangle A_1B_1C$ ，当 A_1 落在 AB 边上时，连接 B_1B ，取 BB_1 的中点 D ，连接 A_1D ，则 A_1D 的长度是（ ）。



A. $\sqrt{7}$

B. $2\sqrt{2}$

C. 3

D. $2\sqrt{3}$

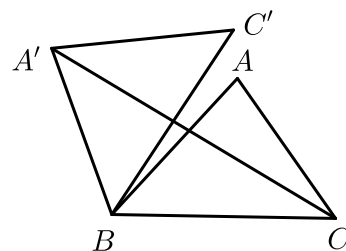
【答案】A

【解析】 $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $AC = 2$ ，
 $\therefore \angle A = 90^\circ - \angle ABC = 60^\circ$ ， $AB = 4$ ， $BC = 2\sqrt{3}$ ，
 $\because CA = CA_1$ ，
 $\therefore \triangle ACA_1$ 是等边三角形， $AA_1 = AC = BA_1 = 2$ ，
 $\therefore \angle BCB_1 = \angle ACA_1 = 60^\circ$ ，
 $\because CB = CB_1$ ，
 $\therefore \triangle BCB_1$ 是等边三角形，
 $\therefore BB_1 = 2\sqrt{3}$ ， $BA_1 = 2$ ， $\angle A_1BB_1 = 90^\circ$ ，
 $\therefore BD = DB_1 = \sqrt{3}$ ，
 $\therefore A_1D = \sqrt{A_1B^2 + BD^2} = \sqrt{7}$ 。
 故选A。

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

17. 2020~2021学年3月河南郑州荥阳市郑州市西一中学初二下学期月考第9题3分 ★★

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 6$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle A'BC'$ ，连接 $A'C$ ，则 $A'C$ 的长为（ ）。



A. 6

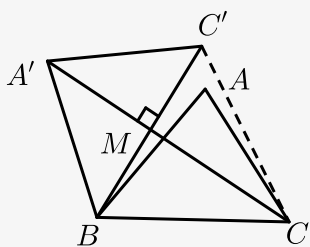
B. $4 + 2\sqrt{3}$

C. $4 + 3\sqrt{3}$

D. $2 + 3\sqrt{3}$

【答案】 C

【解析】 如图，连接 CC' ，



由旋转可知 $\triangle BCC'$ 为等边三角形，

$$\therefore CC' = CB = 6,$$

$$\text{又} \because AB' = A'C' = 5,$$

$$\therefore A'C \text{ 垂直平分 } BC',$$

$$\therefore BM = C'M = 3,$$

$$\therefore A'M = \sqrt{A'C'^2 - C'M^2} = 4,$$

$$CM = \sqrt{CC'^2 - C'M^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore AC' = 4 + 3\sqrt{3},$$

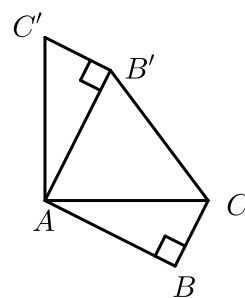
故选 C.

【标注】 【知识点】 旋转的性质

【知识点】 等边三角形的性质

18. 2018~2019学年天津河西区初三上学期期中第18题3分 ★★★

如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 2\sqrt{5}$ ， $BC = \sqrt{5}$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle AB'C'$ ，连接 $B'C$ ，则 CB' 的长度为 _____.



【答案】 5

【解析】 过 C 作 $CM \perp AB'$ 于 M，如图所示，

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中，由勾股定理得：} AC = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = 5,$$

$$\therefore \text{根据旋转得出 } AB' = AB = 2\sqrt{5}, \angle B'AB = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle CMA = 90^\circ.$$

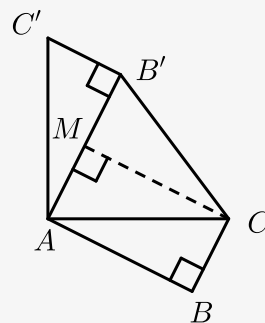
$$\therefore \text{四边形 } ABCM \text{ 是矩形，}$$

$$\therefore CM = AB = 2\sqrt{5}, AM = BC = \sqrt{5}.$$

$$\therefore B'M = AB' - AM = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

在 $\text{Rt}\triangle B'MC$ 中，由勾股定理得：

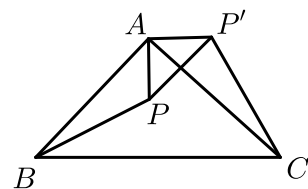
$$B'C = \sqrt{CM^2 + B'M^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = 5.$$



【标注】【知识点】旋转性质综合应用

19. 2020~2021学年天津塘沽区初三上学期期中（第二共同体）第4题3分 ★★★

如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，将 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转后，能与 $\triangle ACP'$ 重合，如果 $AP = 3$ ，那么 PP' 的长等于（ ）。



A. $3\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{2}$

D. $3\sqrt{3}$

【答案】 A

【解析】 由题意，

$\because \triangle ABP$ 旋转后与 $\triangle ACP'$ 重合，

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ACP'$ ，

$\therefore \angle BAP = \angle CAP'$ ， $AP = AP'$ ，

$\because \angle BAP + \angle PAC = \angle BAC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CAP' + \angle PAC = 90^\circ$ ，

即 $\angle PAP' = 90^\circ$ ，

$\because AP = AP'$ ，

$\therefore \triangle APP'$ 为等腰直角三角形，

$\because AP = 3$ ，

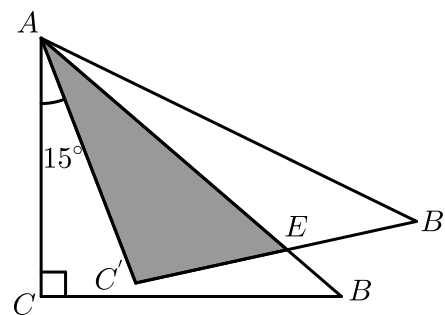
$\therefore PP' = \sqrt{2}AP = 3\sqrt{2}$ ，

故选：A。

【标注】【知识点】等腰直角三角形的手拉手模型

20. 2018年北京大兴区初三中考一模第15题2分 ★★

如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，将其绕点 A 逆时针旋转 15° 得到 $\text{Rt}\triangle AB'C'$ ， $B'C'$ 交 AB 于 E ，若图中阴影部分面积为 $2\sqrt{3}$ ，则 $B'E$ 的长为 _____。



【答案】 $2\sqrt{3} - 2$

【解析】 $\because$ 将 $\text{Rt}\triangle ACB$ 绕点 A 逆时针旋转 15° 得到 $\text{Rt}\triangle AB'C'$ ，

$$\therefore \triangle ACB \cong \triangle AC'B'.$$

$$\therefore AC = AC', CB = C'B', \angle CAB = \angle C'AB'.$$

$$\because \text{在 } \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \angle C = 90^\circ, AC = BC,$$

$$\therefore \angle CAB = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle CAC' = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle C'AE = 30^\circ.$$

$$\therefore AE = 2C'E, AC' = \sqrt{3}C'E.$$

$$\because \text{阴影部分面积为 } 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times C'E \times \sqrt{3}C'E = 2\sqrt{3}, C'E = 2.$$

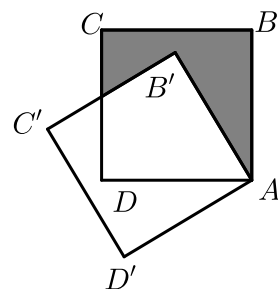
$$\therefore AC = BC = C'B' = \sqrt{3}C'E = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore B'E = 2\sqrt{3} - 2.$$

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

21. 2018~2019学年山西运城盐湖区初二下学期期中第9题3分 ★★

如图，边长为 1 的正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转 30° 到正方形 $AB'C'D'$ ，图中阴影部分的面积为 ()。



A. $\frac{1}{2}$

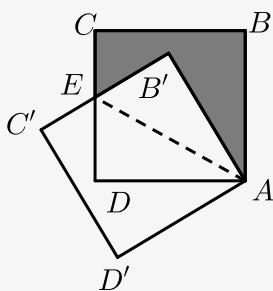
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $1 - \frac{\sqrt{3}}{4}$

【答案】 C

【解析】 如图，设 $B'C'$ 与 CD 的交点为 E ，连接 AE ，



在 $\text{Rt}\triangle AB'E$ 和 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中， $\begin{cases} AE = AE \\ AB' = AD \end{cases}$

$\therefore \text{Rt}\triangle AB'E \cong \text{Rt}\triangle ADE (\text{HL})$ ，

$\therefore \angle DAE = \angle B'AE$ ，

$\therefore$ 旋转角为 30° ，

$\therefore \angle DAB' = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle DAE = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$ ，

$\therefore DE = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

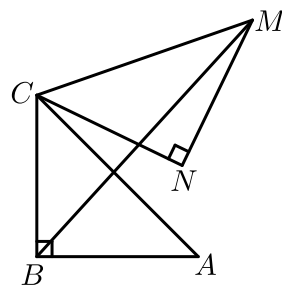
$\therefore$ 阴影部分的面积 $= 1 \times 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

故选：C。

【标注】 【知识点】 旋转性质综合应用

22. 2018~2019学年3月陕西西安碑林区西安尊德中学初二下学期月考第16题3分 ★★★

如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = BC = \sqrt{2}$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 60° ，得到 $\triangle MNC$ ，连接 BM ，则 BM 的长是 _____。



【答案】 $\sqrt{3} + 1$

【解析】 如图，连接 AM ，设 AC 与 BM 交于点 O

由题意得： $CA = CM$ ， $\angle ACM = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ACM$ 为等边三角形，

$\therefore AM = CM$ ， $\angle MAC = \angle MCA = \angle AMC = 60^\circ$ ，

$$\because \angle ABC = 90^\circ, AB = BC = \sqrt{2},$$

$$\therefore CM = AC = 2,$$

$$\because AB = BC, CM = AM,$$

$$\therefore BM \text{ 垂直平分 } AC,$$

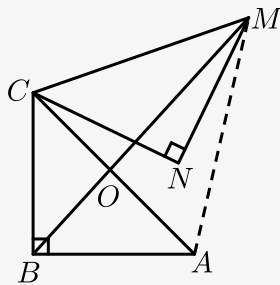
$$\therefore BO = \frac{1}{2}AC = 1,$$

$$OM = CM \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$\therefore$

$$BM = BO + OM = 1 + \sqrt{3},$$

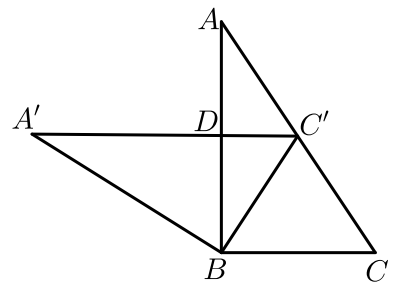
故答案为： $1 + \sqrt{3}$.



【标注】【知识点】利用旋转求线段长

23. 2018~2019学年10月天津西青区天津市西青区张家窝中学初三上学期月考第18题3分 ★★★

如图，两块相同的三角板完全重合在一起， $\angle A = 30^\circ$ ， $AC = 10$ ，把上面一块绕直角顶点 B 逆时针旋转到 $\triangle A'BC'$ 的位置，点 C' 在 AC 上， $A'C'$ 与 AB 相交于点 D ，则 $C'D =$ _____ .



【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】 方法一： $\because \angle A = 30^\circ, AC = 10,$

$$\therefore BC = 5 = BC',$$

$$\text{又} \because BC' = 5 = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore C' \text{ 为 } AC' \text{ 的中点且 } AC' = C'B,$$

$$\therefore \angle DBC' = \angle A = 30^\circ,$$

$$\angle DC'B = \angle C'BC = 60^\circ,$$

$$\therefore DC' \parallel BC,$$

$$\therefore DC' \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的中位线},$$

$$\therefore DC' = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2}.$$

方法二： $\because \triangle A'BC'$ 是由 $\triangle ABC$ 绕 B 点旋转所得，

$$\therefore \triangle A'BC' \cong \triangle ABC, BC' = BC, \angle A' = \angle A = 30^\circ,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ, \angle A = 30^\circ,$$

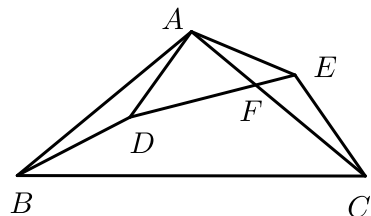
$$\therefore BC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 10 = 5, \angle C = 60^\circ,$$

$\because BC = BC'$,
 $\therefore BC' = 5$ 且 $\triangle BCC'$ 是等边三角形 ,
 $\therefore \angle C'BC = 60^\circ$, $CC' = BC' = 5$,
 $\therefore \angle A'C'B = \angle C = 60^\circ$,
 $\therefore \angle A'C'B = \angle C'BC$,
 $\therefore C'D \parallel BC$,
 $\therefore \angle ABC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ADC' = \angle ABC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle A = 30^\circ$,
 $\therefore C'D = \frac{1}{2}AC'$,
 $\therefore AC' = AC - CC' = 10 - 5 = 5$,
 $\therefore C'D = \frac{5}{2}$.

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

24. 2020~2021学年河北石家庄长安区石家庄市第八十一中学初三上学期期中第14题2分 ★★★

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 6$ ，点 D 为 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle BAD = 15^\circ$ ， $AD = 3$ ，连接 BD ，将 $\triangle ABD$ 绕点 A 按逆时针方向旋转，使 AB 与 AC 重合，点 D 的对应点为点 E ，连接 DE 交 AC 于点 F ，则 AF 的长为（ ）。



- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{6}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$

【答案】 B

【解析】 由旋转知 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，

故 $AD = AE = 3$ ， $\angle BAD = \angle CAE = 15^\circ$ ，

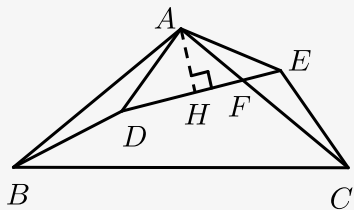
$\angle DAF = 90^\circ - \angle BAD = 75^\circ$ ，

$\therefore \angle DAE = \angle DAF + \angle CAE = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ADE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle ADE = 45^\circ$ ， $\angle AFD = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$ ，

作 $AH \perp DF$ 于 H ，



在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中, $AH = AD \sin 45^\circ = \frac{3}{2}\sqrt{2}$,

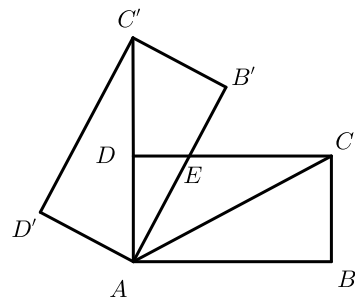
在 $\text{Rt}\triangle AHF$ 中, $AF = \frac{AH}{\sin 60^\circ} = \sqrt{6}$.

故选 B.

【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

25. 2021年天津西青区初三中考二模第11题3分 ★★

如图, 将矩形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转至矩形 $AB'C'D'$ 的位置, 点 B 的对应点是点 B' , 点 C 的对应点是点 C' , 点 C' 在 AD 的延长线上, AB' 交 CD 于点 E . 若 $AE = CE = 4$, 则 AC 的长为 ().



A. $2\sqrt{3}$

B. $4\sqrt{3}$

C. 2

D. 4

【答案】 B

【解析】 $\angle C'AB' = \angle CAB$, 即 $\angle DAE = \angle CAB$,

$\because AE = CE$,

$\therefore \angle EAC = \angle ECA$,

又 $\because DC \parallel AB$,

$\therefore \angle ECA = \angle CAB$,

$\therefore \angle EAC = \angle CAB = \angle DAE = \frac{\angle DAB}{3} = 30^\circ$,

$\therefore \angle AEC = 120^\circ$,

$\therefore AC = \sqrt{AE^2 + CE^2 - 2AE \cdot CE \cdot \cos 120^\circ}$

$= \sqrt{4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}$

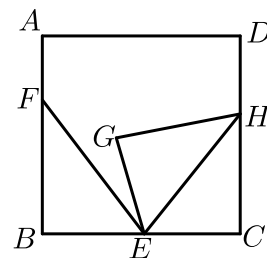
$= 4\sqrt{3}$.

故选 B.

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

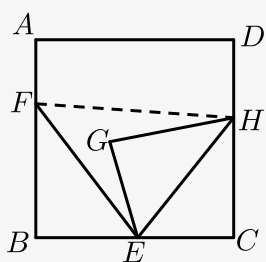
26. 2018~2019学年江西南昌红谷滩新区南昌市第二十六中学初三上学期期中第10题3分 ★★★

如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别在 BC 和 AB 上， $BE = 3$ ， $AF = 2$ ， $BF = 4$ ，将 $\triangle BEF$ 绕点 E 顺时针旋转，得到 $\triangle GEH$ ，当点 H 落在 CD 边上时， F, H 两点之间的距离为 _____。



【答案】 6

【解析】



正方形 $ABCD$ 的边长 $AB = 6$ ，

而 $BE = 3$ ，则 $CE = 3$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BEF$ ， $EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，

$\therefore \triangle BEF$ 绕点 E 顺时针旋转，得到 $\triangle GEH$ ，

$\therefore EF = EH = 5$ ，

在 $\text{Rt}\triangle EHC$ 中， $CH = \sqrt{EH^2 - EC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ，

$\therefore CH = BF = 4$ ，

$\therefore$ 四边形 $BCHF$ 为矩形，

$\therefore FH = BC = 6$ ，

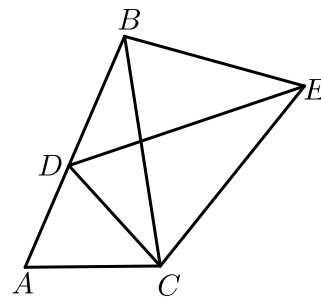
故答案为 6。

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

练习5

27. 2019~2020学年湖北鄂州鄂城区初三上学期期中第6题3分 ★★★

如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到 $\triangle DEC$ ，使点 A 的对应点 D 恰好落在边 AB 上，点 B 的对应点为 E ，连接 BE ，下列结论一定正确的是（ ）。



- A. $AC = AD$ B. $AB \perp EB$ C. $BC = DE$ D. $\angle A = \angle EBC$

【答案】 D

【解析】 由旋转性质可知，

$$AC = CD, AC \neq AD,$$

$\therefore$ A选项是错误的；

又由旋转性质可知， $BC = EC, BC \neq DE$ ，

$\therefore$ C选项是错误的；

由旋转性质可知， $\angle ACB = \angle DCE$ ，

$$\therefore \angle ACB = \angle ACD + \angle DCB, \angle DCE = \angle ECB + \angle DCB,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ECB,$$

$$\therefore AC = CD, BC = CE,$$

$$\therefore \angle A = \angle CDA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACD), \angle EBC = \angle CEB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ECB),$$

$$\therefore \angle A = \angle EBC,$$

$\therefore$ D选项是正确的，

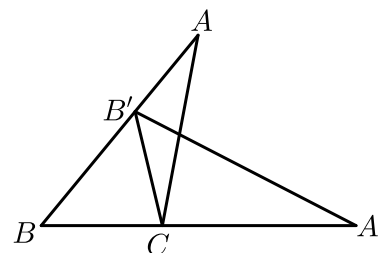
由题意无法推出 $\angle ABE = 90^\circ$ ，

$\therefore$ B选项是错误的。

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

28. 2017~2018学年江苏苏州工业园区苏州星海实验中学初二下学期期中第7题2分 ★★

如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转，使点 B 落在 AB 边上点 B' 处，此时，点 A 的对应点 A' 恰好落在 BC 边的延长线上，下列结论错误的是（ ）。



- A. $\angle BCB' = \angle ACA'$ B. $\angle ACB = 2\angle B$ C. $\angle B'CA = \angle B'AC$ D. $B'C$ 平分 $\angle BB'A'$

【答案】 C

【解析】 根据旋转的性质得， $\angle BCB'$ 和 $\angle ACA'$ 都是旋转角，

则 $\angle BCB' = \angle ACA'$ ，故 A 正确，

$\therefore CB = CB'$ ，

$\therefore \angle B = \angle BB'C$ ，

又 $\therefore \angle A'CB' = \angle B + \angle BB'C$ ，

$\therefore \angle A'CB' = 2\angle B$ ，

又 $\therefore \angle ACB = \angle A'CB'$ ，

$\therefore \angle ACB = 2\angle B$ ，故 B 正确；

$\therefore \angle A'B'C = \angle B$ ，

$\therefore \angle A'B'C = \angle BB'C$ ，

$\therefore B'C$ 平分 $\angle BB'A'$ ，故 D 正确；

故选 C。

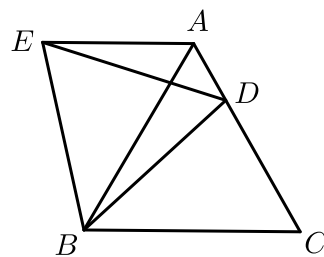
【标注】 【知识点】 旋转的性质

29. 2014~2015学年天津和平区初三上学期期中 ★★★

在等边三角形 ABC 中， D 是边 AC 上一点，连接 BD ，将 $\triangle BCD$ 绕点 B 逆时针旋转 60° ，得到 $\triangle BAE$ ，连接 ED ，若 $BC = 5$ ， $BD = 4$ 有下列结论：

- ① $AE \parallel BC$
- ② $\angle ADE = \angle BDC$
- ③ $\triangle BDE$ 是等边三角形
- ④ $\triangle ADE$ 的周长是 9

其中正确的有 () 个。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 C

【解析】 ① $\triangle BCD$ 旋转得到 $\triangle BAE$ ， $\therefore \angle BAE = \angle C = 60^\circ$ ，

等边三角形 ABC 中， $\angle ABC = \angle C = 60^\circ$ ，

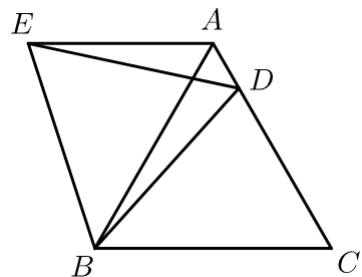
$\therefore \angle BAE = \angle ABC = 60^\circ$ ，得到 $AE \parallel BC$ 。

② $\triangle BCD$ 旋转 60° 得到 $\triangle BAE$,
 $\therefore$ 旋转角 $\angle EBD = 60^\circ$, $BE = BD$, $\triangle BDE$ 为等边三角形 ,
 则 $\angle BDE = 60^\circ$, 而 $\angle BDC = \angle BDE + \angle ABD > 60^\circ$,
 又 $\angle ADE + \angle BDE + \angle BDC = 180^\circ$,
 $\therefore \angle BDC > \angle ADE$.
 ③ 由②得 , $\triangle BDE$ 为等边三角形 .
 ④ $\triangle ADE$ 周长为 $AE + AD + ED$,
 $\therefore$ 等边 $\triangle BDE$ 边长 , BD 为 4 ,
 $\therefore ED = 4$,
 又 $\therefore AE = CD$,
 $\therefore AE + AD = CD + AD = AC = 5$,
 $\therefore \triangle ADE$ 周长为 9 .
 即得①、③、④正确 , 答案选 C .

【标注】【知识点】旋转的性质

30. 2018~2019学年山东枣庄滕州市初二下学期期中第15题3分 ★★★

在等边 $\triangle ABC$ 中 , D 是边 AC 上一点 , 连接 BD , 将 $\triangle BCD$ 绕点 B 逆时针旋转 60° , 得到 $\triangle BAE$, 连接 ED , 若 $BC = 5$, $BD = 4$, 则以下四个结论中 : ① $\triangle BDE$ 是等边三角形 ; ② $AE \parallel BC$; ③ $\triangle ADE$ 的周长是 9 ; ④ $\angle ADE = \angle BDC$. 其中正确的序号是 () .



A. ②③④

B. ①③④

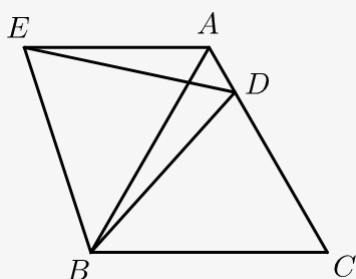
C. ①②④

D. ①②③

【答案】 D

【解析】 $\therefore \triangle BCD$ 绕点 B 逆时针旋转 60° , 得到 $\triangle BAE$,
 $\therefore BD = BE$, $\angle DBE = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle BDE$ 是等边三角形 , 所以①正确 ;
 $\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形 ,
 $\therefore BA = BC$, $\angle ABC = \angle C = \angle BAC = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle BCD$ 绕点 B 逆时针旋转 60° , 得到 $\triangle BAE$,
 $\therefore \angle BAE = \angle BCD = 60^\circ$, $\angle BCD = \angle BAE = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAE = \angle ABC$,
 $\therefore AE \parallel BC$, 所以②正确 ;
 $\therefore \angle BDE = 60^\circ$,
 $\therefore \angle BDC = \angle BAC + \angle ABD > 60^\circ$,
 $\therefore \angle ADE \neq \angle BDC$, 所以④错误 ;
 $\therefore \triangle BDE$ 是等边三角形 ,
 $\therefore DE = BD = 4$,
 而 $\triangle BCD$ 绕点 B 逆时针旋转 60° , 得到 $\triangle BAE$,
 $\therefore AE = CD$,
 $\therefore \triangle AED$ 的周长 $= AE + AD + DE = CD + AD + DE$
 $= AC + 4 = 5 + 4 = 9$, 所以③正确 .
 故选 D .

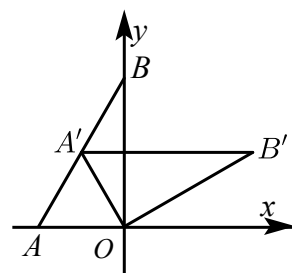


【标注】【知识点】旋转性质综合应用

练习6

31. ★★★★★

如图, 在平面直角坐标系中, 点 B 的坐标为 $(0, 3)$, $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. 将 $\triangle AOB$ 绕点 O 顺时针旋转一定角度后得到 $\triangle A'OB'$, 并且点 A' 恰好落到线段 AB 上, 则点 A' 的坐标为 ().



A. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

B. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C. $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

【答案】D

【解析】 $\because$ 点 B 的坐标为 $(0, 3)$,

$\therefore BO = 3$,

$\because \angle AOB = 90^\circ, \angle ABO = 30^\circ,$

$\therefore AO = BO \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}, \angle BAO = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$

$\because \triangle A'OB'$ 是由 $\triangle AOB$ 旋转得到, 点 A' 在 AB 上,

$\therefore A'O = AO,$

$\therefore \triangle AOA'$ 是等边三角形,

$\therefore \angle AOA' = 60^\circ,$

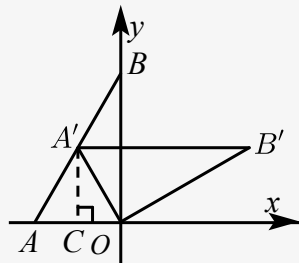
过点 A' 作 $A'C \perp AO$ 于点 C ,

则 $A'C = A'O \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}, OC = A'O \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$\therefore$ 点 A' 在第二象限,

$\therefore$ 点 $A'(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}).$

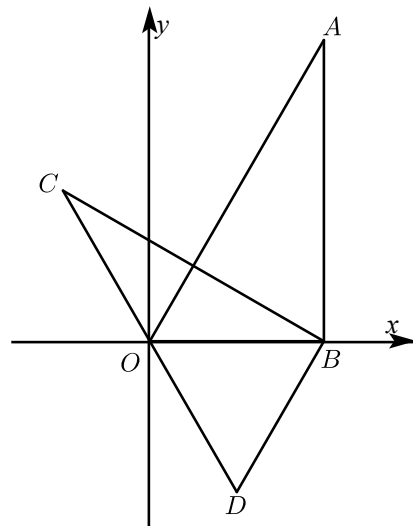
故选 D.



【标注】【知识点】象限内坐标的特征

32. 2019年内蒙古巴彦淖尔杭锦后旗初三中考一模第19题3分 ★★

如图, 在直角坐标系中, 点 A 的坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$, $AB \perp x$ 轴于 B , 将 $\triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle CBD$, 则点 C 的坐标是 _____.

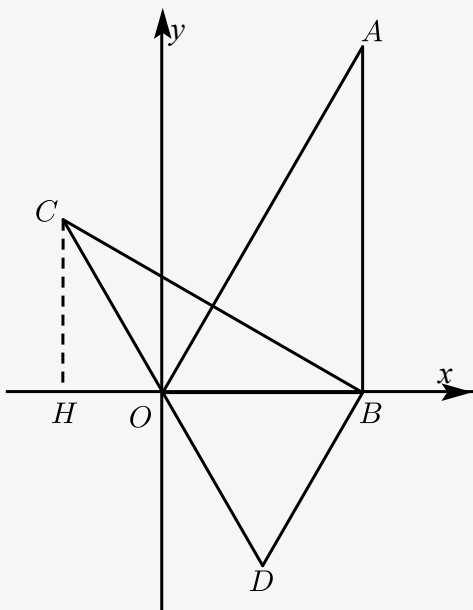


【答案】 $(-1, \sqrt{3})$

【解析】 如图, 作 $CH \perp x$ 轴于 H .

$\because A(2, 2\sqrt{3}), AB \perp OB.$

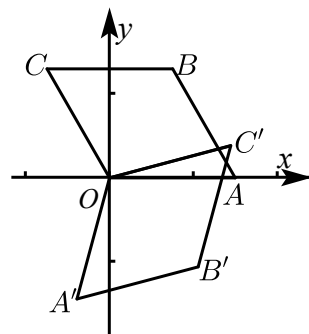
$\therefore OB = 2, AB = 2\sqrt{3},$
 $\therefore \tan \angle AOB = \frac{AB}{OB} = \sqrt{3},$
 $\therefore \angle AOB = \angle D = 60^\circ,$
 $\therefore OA = CD = 2OB = 4,$
 $\therefore OB = BD,$
 $\therefore \triangle OBD$ 是等边三角形,
 $\therefore OD = BD = 2,$
 $\therefore CO = 2, \angle COH = \angle DOB = 60^\circ,$
 $\therefore OH = \frac{1}{2}OC = 1, CH = \sqrt{3},$
 $\therefore C(-1, \sqrt{3}),$
 故答案为 $(-1, \sqrt{3})$.



【标注】【知识点】旋转性质综合应用

33. 2018~2019学年10月天津南开区天津崇化中学初三上学期月考第17题3分 ★★

如图，菱形 $OABC$ 的顶点 O 在坐标原点，顶点 A 在 x 轴上， $\angle B = 120^\circ$ ， $OA = 2$ ，将菱形 $OABC$ 绕原点顺时针旋转 105° 至 $OA'B'C'$ 的位置，则点 B' 的坐标为 _____ .



【答案】 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

【解析】如图，连接 OB ， OB' ，

过 B' 作 $B'E \perp x$ 轴于 E ，则

$$\angle B'OB = 105^\circ,$$

$\because$ 四边形 $OABC$ 为菱形，

$$\therefore OA = OB,$$

$$\angle AOB = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle OAB$ 是等边三角形，

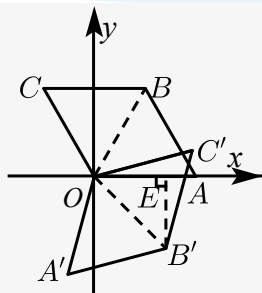
$$\therefore OB = OA = 2,$$

$$\therefore \angle AOB' = \angle BOB' - \angle AOB = 105^\circ - 60^\circ = 45^\circ,$$

$$OB' = OA = 2,$$

$$\therefore OE = \sqrt{2},$$

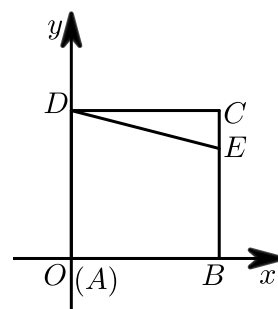
$$\therefore B' \text{ 坐标为 } (\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$



【标注】【知识点】旋转性质综合应用

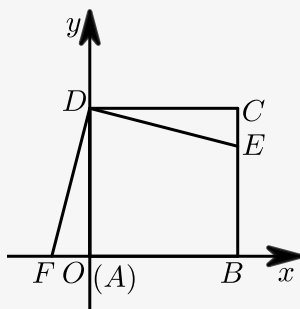
34. 2017~2018学年9月天津河北区天津市汇森中学初三上学期月考第16题3分 ★★

如图，正方形 $ABCD$ 的两条邻边分别在 x 、 y 轴上，点 E 在 BC 边上， $AB = 4$ ， $BE = 3$ ，若将 $\triangle CDE$ 绕点 D 按顺时针方向旋转 90° ，则点 E 的对应点的坐标为 _____。



【答案】 $(-1, 0)$

【解析】如图，



$\triangle CDE$ 绕点 D 按顺时针方向旋转 90° 后为如图 $\triangle ODF$ 位置，

$$OF = CE = BC - BE = 1,$$

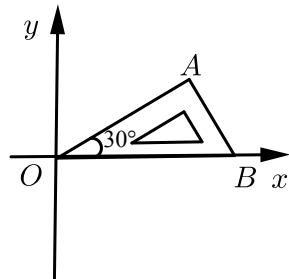
$\therefore$ 点 E 的对应点 F 的坐标为 $(-1, 0)$ 。

故答案为： $(-1, 0)$.

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

35. 2020年山东枣庄山亭区初三中考一模第7题3分 ★★

将含有 30° 角的直角三角板 OAB 如图放置在平面直角坐标系中， OB 在 x 轴上，若 $OA = 2$ ，将三角板绕原点 O 顺时针旋转 75° ，则点 A 的对应点 A' 的坐标为 () .



A. $(\sqrt{3}, -1)$

B. $(1, -\sqrt{3})$

C. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

D. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【答案】C

【解析】如图所示：过点 A' 作 $A'C \perp OB$.

$\therefore$ 将三角板绕原点 O 顺时针旋转

75° ,

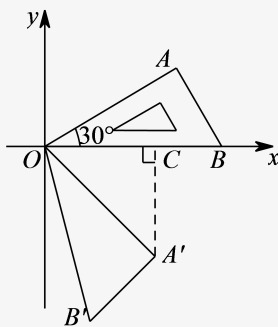
$\therefore \angle AOA' = 75^\circ$, $OA' = OA$.

$\therefore \angle COA' = 45^\circ$.

$\therefore OC = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$,

$CA' = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

$\therefore A'$ 的坐标为 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.



【标注】【知识点】旋转的性质

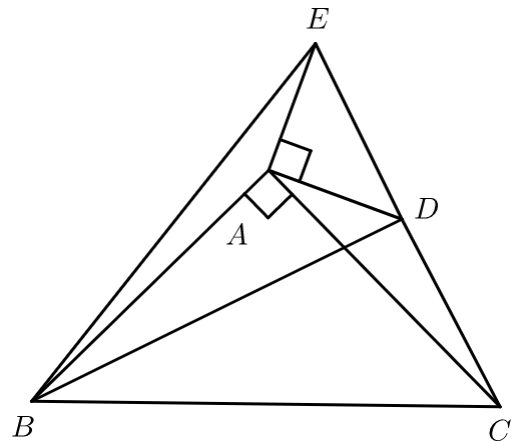
二、 旋转之手拉手模型

1. “手拉手”模型正用

练习7

36. ★★

已知：如图，在 $\triangle ABC$, $\triangle ADE$ 中， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$, $AB = AC$, $AD = AE$, 点 C , D , E 三点在同一条直线上，连接 BD , BE . 则 $\angle BDC =$ _____ $^\circ$.



【答案】 90

【解析】 $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle DAE + \angle CAD$,
 即 $\angle BAD = \angle CAE$,
 $\therefore$ 在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中 ,

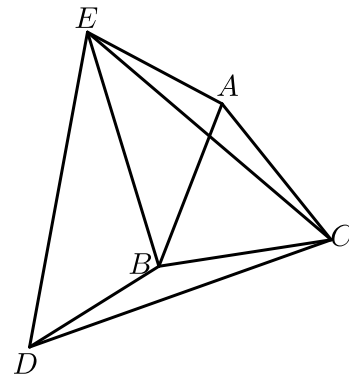
$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE , \\ AD = AE \end{cases}$$

 $\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS) ,
 $\therefore \angle ABD = \angle ACE$,
 $\because \angle ABD + \angle DBC = 45^\circ$,
 $\therefore \angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$,
 $\therefore \angle DBC + \angle DCB = \angle DBC + \angle ACE + \angle ACB = 90^\circ$,
 则 $\angle BDC = 90^\circ$.

【标注】 【知识点】 蝴蝶型（8字倒角）；等腰直角三角形的手拉手模型

37. ★★

如图，设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，若 $\angle AEB = 70^\circ$ ，则 $\angle EBD = \underline{\quad\quad}^\circ$.



【答案】 130

【解析】易证 $\triangle AEC \cong \triangle BDC$ (SAS) ,

可得 $\angle AEC = \angle BDC$,

$\therefore \angle AEB = \angle AEC + \angle BEC = \angle BDC + \angle BEC$.

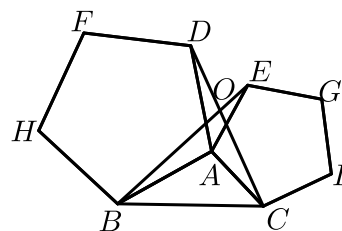
由燕尾模型 (飞镖模型) 可得 ,

$\angle EBD = \angle BDC + \angle BEC + \angle ECD = 70^\circ + 60^\circ = 130^\circ$.

【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

38. ★★★

在 $\triangle ABC$ 中, 分别以 AB , AC 为边, 向 $\triangle ABC$ 外作正五边形, BE 、 CD 相交于点 O . $\angle BOC =$ _____ $^\circ$.



【答案】 72

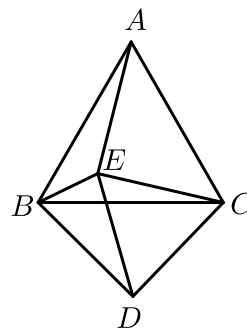
【解析】手拉手模型全等, 先求 $\angle BOC$ 的补角, 补角就等于旋转角, 即多边形的内角,

$\therefore \angle BOC = 72^\circ$.

【标注】【知识点】正方形等其他图形的手拉手模型

39. 2017~2018学年四川德阳中江县初二上学期期末第12题3分 ★★★

如图, 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形, 且 $\angle EBD = 65^\circ$, 则 $\angle AEB$ 的度数是 () .



A. 115°

B. 120°

C. 125°

D. 130°

【答案】 C

【解析】 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形,

$\therefore AC = BC$, $CE = CD$, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ACB = \angle ECD = 60^\circ$,

$\therefore \angle ACB - \angle ECB = \angle ECD - \angle ECB$,
 $\therefore \angle ACE = \angle BCD$,
 在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中 ,

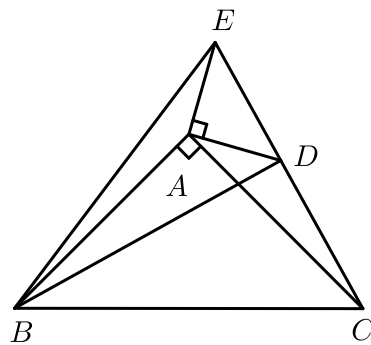
$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACE = \angle BCD \\ CE = CD \end{cases}$$

 $\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD$ (SAS) ,
 $\therefore \angle CAE = \angle CBD$,
 $\therefore \angle EBD = 65^\circ$,
 $\therefore 65^\circ - \angle EBC = 60^\circ - \angle BAE$,
 $\therefore 65^\circ - (60^\circ - \angle ABE) = 60^\circ - \angle BAE$,
 $\therefore \angle ABE + \angle BAE = 55^\circ$,
 $\therefore \angle AEB = 180^\circ - (\angle ABE + \angle BAE) = 125^\circ$.
 故选 C .

【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

40. 2018~2019学年河北保定满城县初二上学期期末第15题2分 ★★★

已知：如图，在 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 中， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， C ， D ， E 三点在同一条直线上，连接 BD ， BE 。以下四个结论：① $BD = CE$ ；② $\angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$ ；
 ③ $BD \perp CE$ ；④ $\angle BAE + \angle DAC = 180^\circ$ 。其中结论正确的个数是（ ）。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 D

【解析】 ① $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle DAE + \angle CAD$, 即 $\angle BAD = \angle CAE$,
 在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中 ,
$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

 $\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS) ,
 $\therefore BD = CE$, ①正确 .
 ② $\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形 ,

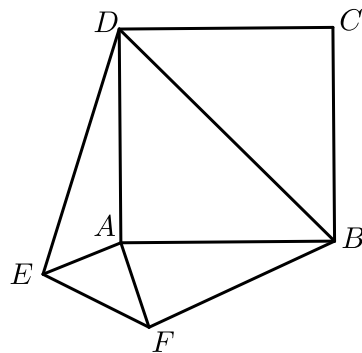
$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$,
 $\therefore \angle ABD + \angle DBC = 45^\circ$,
 $\because \triangle BAD \cong \triangle CAE$,
 $\therefore \angle ABD = \angle ACE$,
 $\therefore \angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$, ②正确 .
 ③ $\because \angle ABD + \angle DBC = 45^\circ$,
 $\therefore \angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$,
 $\therefore \angle DBC + \angle DCB = \angle DBC + \angle ACE + \angle ACB = 90^\circ$,
 则 $BD \perp CE$, ③正确 .
 ④ $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BAE + \angle DAC = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$, ④正确 ,
 故选 : D .

【标注】【知识点】等腰直角三角形与全等

练习8

41. 2019年陕西西安雁塔区雁塔区高新一中初三中考二模第14题 ★★★

如图，在边长为 3 的正方形 $ABCD$ 的外部作等腰 $\text{Rt}\triangle AEF$ ， $AE = 1$ ，连接 DE ， BF ， BD ，则 $DE^2 + BF^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

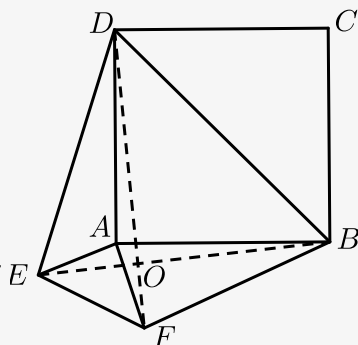


【答案】 20

【解析】连接 BE ， DF 交于点 O ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
 $\therefore AD = AB$ ，
 $\angle DAB = 90^\circ$ ，

$\because \triangle AEF$ 是等腰直角三角形，
 $\therefore AE = AF$ ，
 $\angle EAF = 90^\circ$ ，

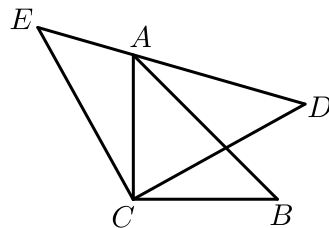


$\therefore AE = AF, \angle EAF = 90^\circ,$
 $\therefore \angle EAB = \angle DAF, \text{ 且 } AD = AB, AE = AF,$
 $\therefore \triangle AEB \cong \triangle AFD (\text{SAS}),$
 $\therefore \angle AFD = \angle AEB,$
 $\therefore \angle AEF + \angle AFE = 90^\circ,$
 $\therefore \angle AEF + \angle AFE = \angle AEB + \angle BEF + \angle AFE$
 $= \angle BEF + \angle AFE + \angle AFD$
 $= \angle BEF + \angle EFD = 90^\circ,$
 $\therefore \angle EOF = 90^\circ,$
 $\therefore EO^2 + FO^2 = EF^2, DO^2 + BO^2 = DB^2,$
 $EO^2 + DO^2 = DE^2, OF^2 + BO^2 = BF^2,$
 $\therefore DE^2 + BF^2 = EF^2 + DB^2 = 2AE^2 + 2AD^2 = 20.$
 故答案为：20.

【标注】【知识点】等腰直角三角形的手拉手模型

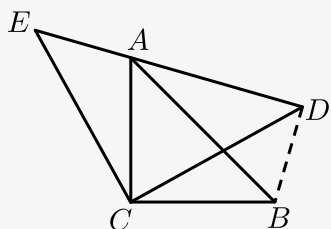
42. 2019~2020学年天津河西区初二下学期期中第16题3分 ★★★

如图， $\triangle ACB$ 和 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形， $CA = CB, CE = CD, \triangle ABC$ 的顶点 A 在 $\triangle ECD$ 的斜边上，若 $AE = \sqrt{3}, AD = \sqrt{7}$ ，则 AC 的长为 _____ .



【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】 如图，连接 BD ，



$\therefore CE = CD, \angle ECD = 90^\circ,$
 $\therefore \angle E = \angle CDE = 45^\circ,$
 $\therefore \angle ACB = 90^\circ,$
 $\therefore \angle ECD = \angle ACB = 90^\circ,$
 $\therefore \angle ECD - \angle ACD = \angle ACB - \angle ACD,$

即 $\angle ACE = \angle BCD$,

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中,

$$\begin{cases} CE = CD \\ \angle ACE = \angle BCD, \\ CA = CB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD$,

$\therefore AE = BD = \sqrt{3}$, $\angle E = \angle BDC = 45^\circ$,

$\therefore \angle ADB = \angle CDE + \angle BDC$

$= 45^\circ + 45^\circ$

$= 90^\circ$,

$\therefore AD = \sqrt{7}$,

$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{10}$,

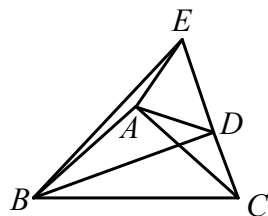
$\therefore AC = CB$,

$\therefore AC = \sqrt{5}$.

【标注】【知识点】等腰直角三角形的手拉手模型

43. 2013年黑龙江绥化中考真题第19题3分 ★★★★★

已知：如图在 $\triangle ABC$, $\triangle ADE$ 中, $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$, $AB = AC$, $AD = AE$, 点 C , D , E 三点在同一条直线上, 连接 BD , BE . 以下四个结论：① $BD = CE$ ；② $BD \perp CE$ ；③ $\angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$ ；④ $BE^2 = 2(AD^2 + AB^2)$ ；其中正确结论的个数是 () .



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 C

【解析】 ①项, 由题意可知, $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$, 因为

$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 90^\circ + \angle CAD$, $\angle CAE = \angle DAE + \angle CAD = 90^\circ + \angle CAD$,

所以 $\angle BAD = \angle CAE$, 在 $\triangle BAD$ 与 $\triangle CAE$ 中, $\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$, 所以

$\triangle BAD \cong \triangle CAE (SAS)$, 故 $BD = CE$, 故①项正确.

②项, 由①得 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$, $\angle ACE = \angle ABD$, 则

$\angle DBC + \angle DCB = \angle DBC + (\angle BCA + \angle ACD) =$

$(\angle DBC + \angle ABD) + \angle BCA = \angle ABC + \angle ACB$ ，因为 $\angle BAC = 90^\circ$ ，由三角形内角和为 180° 可知， $\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle BAC = 90^\circ$ ，即 $\angle DBC + \angle DCB = 90^\circ$ ，所以 $\angle DBC = 180^\circ - (\angle DBC + \angle DCB) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ，故 $BD \perp CE$ ，故②项正确。

③项，因为 $\angle ACE = \angle ABD$ ，所以 $\angle ACE + \angle DBC = \angle ABD + \angle DBC = \angle ABC$ ，因为 $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，则 $\angle ABC = 45^\circ$ ，即 $\angle ACE + \angle DBC = 45^\circ$ ，故③项正确。

④项，由②知， $BD \perp CE$ ，所以 $\angle BDC = \angle BDE = 90^\circ$ ，在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中，由勾股定理得， $BE^2 = BD^2 + DE^2 = BD^2 + (AD^2 + AE^2) = 2AD^2 + BD^2$ ，又因为 $2(AD^2 + AB^2) = 2AD^2 + 2AB^2 = 2AD^2 + BC^2$ ，因为 $BC^2 \neq BD^2$ ，所以 $2AD^2 + BD^2 \neq 2AD^2 + BC^2$ ，即 $BE^2 \neq 2(AD^2 + AB^2)$ ，故④项错误。

综上所述，正确的结论有 3 个。

故本题正确答案为 C。

【标注】【知识点】直接用勾股求边长；等腰直角三角形的手拉手模型

44. ★★★★★

如图 (1) 已知 $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，将 $\triangle ADE$ 顺时针旋转得到图 (2) 时，连结 BD 和 CE ，再将 BD 、 CE 分别延长至 M 、 N ，使 $DM = \frac{1}{2}BD$ ， $EN = \frac{1}{2}CE$ ，得到图 (3)，请解答下列问题。

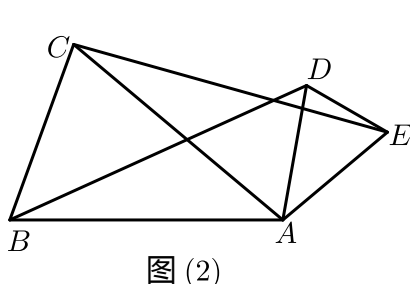


图 (2)

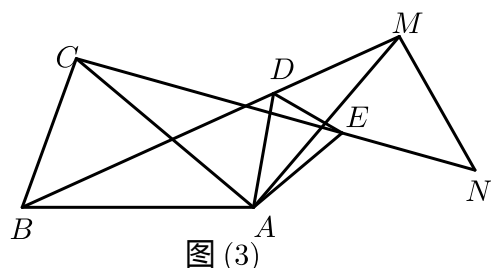


图 (3)

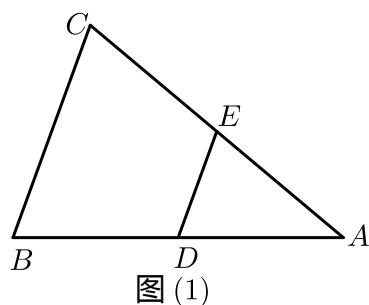


图 (1)

- (1) 在图 (1) 中， BD 与 CE 的数量关系是 _____。
- (2) 在图 (2) 中，猜想 BD 与 CE 的数量关系，并证明你的猜想。
- (3) 在图 (3) 中，直接写出 AM 与 AN 的数量关系， $\angle MAN$ 与 $\angle BAC$ 的数量关系。

【答案】 (1) 相等

(2) 相等，证明见解析。

(3) $AM = AN$, $\angle MAN = \angle BAC$.

【解析】(1) 略.

(2) 由旋转的性质知 $\angle BAD = \angle CAE$,

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中,

$$\therefore \begin{cases} BA = CA \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS),

$\therefore BD = CE$,

故答案为: $BD = CE$.

(3) $AM = AN$, $\angle MAN = \angle BAC$,

由(1)知 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$, $\therefore \angle ABD = \angle ACE$, $BD = CE$,

又 $\therefore DM = \frac{1}{2}BD$, $EN = \frac{1}{2}CE$,

$\therefore BM = CN$,

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACN$ 中, $\therefore \begin{cases} BM = CN \\ \angle ABM = \angle ACN \\ BA = CA \end{cases}$, $\therefore \triangle ABM \cong \triangle ACN$ (SAS),

$\therefore AM = AN$, $\angle BAM = \angle CAN$,

即 $\angle BAC + \angle CAM = \angle CAM + \angle MAN$,

$\therefore \triangle AMN$ 为等腰三角形, 且 $\angle MAN = \angle BAC$.

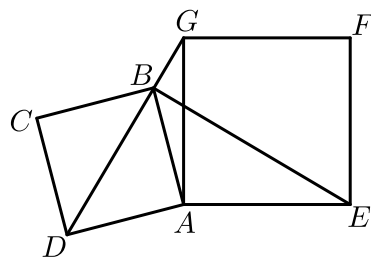
故答案为: $AM = AN$, $\angle MAN = \angle BAC$.

【标注】【知识点】手拉手模型

练习9

45. 2019年天津和平区初三中考一模第17题3分 ★★★

如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 正方形 $AEFG$ 的边长为 $2\sqrt{2}$, 点 B 在线段 DG 上, 则 BE 的长为 _____.



【答案】 $\sqrt{2} + \sqrt{6}$

【解析】 $\therefore \angle DAB = \angle GAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAB + \angle 1 = \angle GAE + \angle 1$, 即 $\angle DAG = \angle BAE$,

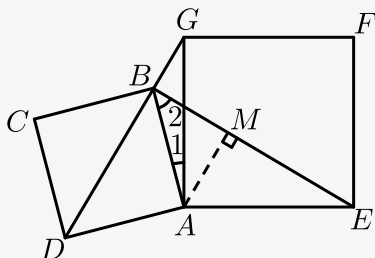
在 $\triangle DAG$ 和 $\triangle BAE$ 中 ,

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle DAG = \angle BAE , \\ AG = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle DAG \cong \triangle BAE$ (SAS) ,

$\therefore \angle 2 = \angle ADB = 45^\circ$,

如图 , 作 $AM \perp BE$ 于 M ,



$\therefore \angle 2 = 45^\circ$,

$\therefore \triangle ABM$ 为等腰直角三角形 ,

$$\therefore AM = BM = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} ,$$

$\therefore AE = 2\sqrt{2}$,

$$\therefore ME = \sqrt{AE^2 - AM^2} = \sqrt{6} ,$$

$$\therefore BE = BM + ME = \sqrt{2} + \sqrt{6} .$$

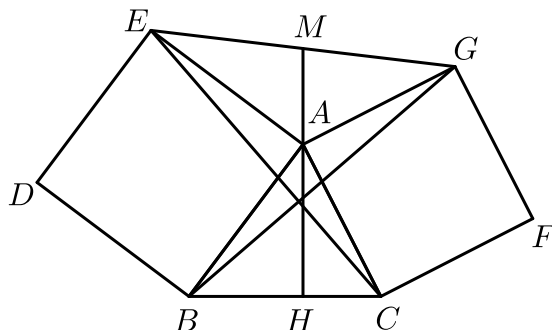
【标注】【知识点】正方形与全等综合

46.

2019~2020 学年浙江杭州滨江区杭二中白马湖学校初二上学期单元测试《全等三角形提升》第16题4分

★★★★

在锐角三角形 ABC 中 , AH 是 BC 边上的高 , 分别以 AB , AC 为一边 , 向外作正方形 $ABDE$ 和正方形 $ACFG$, 连接 CE 、 BG 和 EG , EG 与 HA 的延长线交于点 M , 下列结论 : ① $BG = CE$; ② $BG \perp CE$; ③ AM 是 $\triangle AEG$ 的中线 ; ④ $\angle EAM = \angle ABC$, 其中正确结论的有 _____ (填序号) .



【答案】 ①②③④

【解析】 在正方形 $ABDE$ 和正方形 $ACFG$ 中 , $AB = AE$, $AC = AG$, $\angle BAE = \angle CAG = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BAE + \angle BAC = \angle CAG + \angle BAC ,$$

即 $\angle CAE = \angle BAG$,

$\therefore$ 在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle AEC$ 中,

$$\begin{cases} AB = AE \\ \angle BAG = \angle EAC, \\ AG = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle AEC$ (SAS),

$\therefore BG = CE$, 故①正确;

设 BG , CE 相交于点 N ,

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle AEC$,

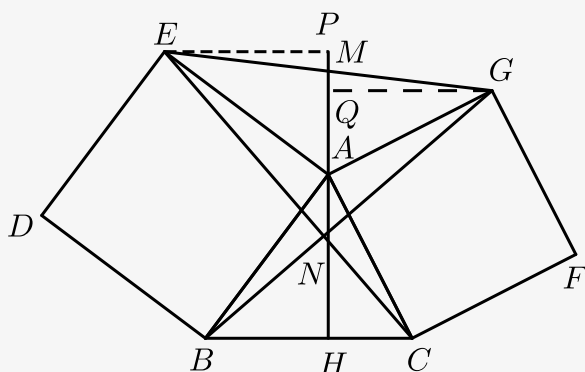
$\therefore \angle ACE = \angle AGB$,

$\therefore \angle NCF + \angle NGF = \angle ACF + \angle AGF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$,

$\therefore \angle CNG = 360^\circ - (\angle NCF + \angle NGF + \angle F) = 360^\circ - (180^\circ + 90^\circ) = 90^\circ$,

$\therefore BG \perp CE$, 故②正确;

过点 E 作 $EP \perp HA$ 交 HA 的延长线于点 P , 过点 G 作 $GQ \perp AM$ 于点 Q ,



$\therefore AH \perp BC$,

$\therefore \angle ABH + \angle BAH = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle EAP + \angle BAH = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABH = \angle EAP$, 即 $\angle ABC = \angle EAM$, 故④正确;

$\therefore$ 在 $\triangle ABH$ 和 $\triangle EAP$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABH = \angle EAP \\ \angle AHB = \angle P = 90^\circ, \\ AB = EA \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABH \cong \triangle EAP$ (AAS),

$\therefore EP = AH$,

同理 $GQ = AH$,

$\therefore EP = AH = GQ$,

$\therefore$ 在 $\triangle EPM$ 和 $\triangle GQM$ 中,

$$\begin{cases} \angle P = \angle MQG = 90^\circ \\ \angle EMP = \angle GMQ, \\ EP = GQ \end{cases}$$

$\therefore \triangle EPM \cong \triangle GQM$ (AAS),

$$\therefore EM = GM,$$

$\therefore AM$ 是 $\triangle AEG$ 的中线，故③正确．

综上所述，①②③④结论都正确．

【标注】【知识点】正方形等其他图形的手拉手模型

47. 2019~2020学年吉林长春绿园区长春市解放大路中学初二下学期期末第22题9分 ★★★

感知：如图1，正方形 $OABC$ 与正方形 $ODEF$ 中，当点 F 、 O 、 A 三点共线时连接 AD 、 CF ，易证 $\triangle AOD \cong \triangle COF$ ，则 $AD = CF$ ， $AD \perp CF$ （不要求证明）．

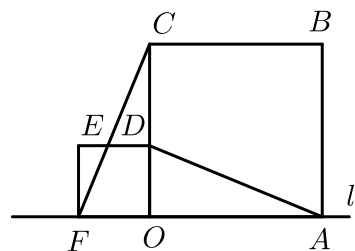


图1

(1) 探究：如图2，正方形 $ODEF$ 绕点 O 逆时针旋转一定角度，试判断 $AD = CF$ ， $AD \perp CF$ 是否依然成立．若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由．

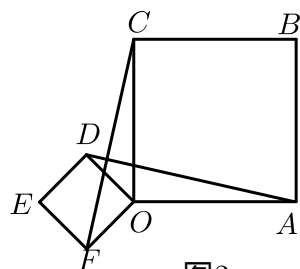


图2

(2) 应用：如图③，已知 $AO = 4$ ， $OD = \sqrt{2}$ ，正方形 $ODEF$ 绕点 O 逆时针旋转，当 E 、 O 、 A 三点共线时，连接 AC 、 CD 、 DF 、 AF ，则四边形 $ACDF$ 的面积为 _____．

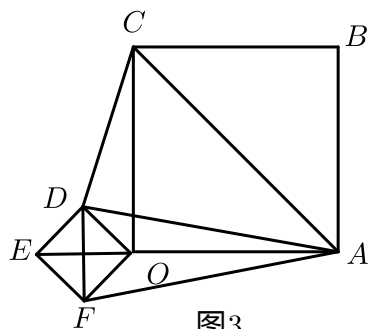


图3

【答案】 (1) 成立；证明见解析．

(2) 13

【解析】 (1) 探究：如图2所示：假设 AD 与 CO 交于点 H ， AD 与 CF 交于点 M ， $AD = CF$ ， $AD \perp CF$ ，

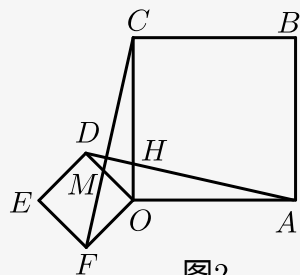


图2

∵ 四边形 $ABCO$ 与四边形 $ODEF$ 为正方形，

∴ $AO = CO$ ， $OD = OF$ ， $\angle AOC = 90^\circ$ ， $\angle DOF = 90^\circ$ ，

∴ $\angle AOC + \angle COD = \angle DOF + \angle COD$ ，

即 $\angle AOD = \angle COF$ ，

在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle COF$ 中 $\begin{cases} AO = CO \\ \angle AOC = \angle COF \\ OD = OF \end{cases}$ ，

∴ $\triangle AOD \cong \triangle COF$ (SAS)，

∴ $AD = CF$ ， $\angle DAO = \angle FCO$ ，

又∵ $\angle CHD = \angle AHD$ ，

∴ $\angle CMH = \angle AOH = 90^\circ$ ，

∴ $AD \perp CF$ 。

(2) 如图3所示，设 OE 与 DF 交于点 Q ，

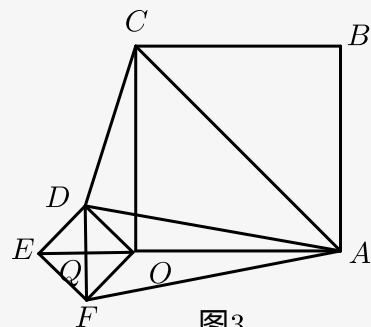


图3

由题可知 $DQ = QF = \frac{1}{2}DF$ ，

∴ $S_{\text{正方形}ODEF} = OD^2 = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot OE$ ，

$DF = OE$ ， $OD = \sqrt{2}$ ，

∴ $(\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \cdot DF^2$ ，

解得： $DF = 2$ ，

则 $DQ = QF = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ ，

∴ $AQ = OQ + AO$

$= DQ + AO$

$= 1 + 4 = 5$ ，

则 $S_{\text{四边形}ACDF} = S_{\text{梯形}CDQO} + S_{\triangle QFA} + S_{\triangle AOC}$

$= \frac{1}{2}(DQ + OC) \cdot OQ + \frac{1}{2} \cdot QF \cdot AQ + \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OC$

$= \frac{1}{2} \times (1 + 4) \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times (1 + 4) + \frac{1}{2} \times 4 \times 4$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + 8 \\
 &= 13 .
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】正方形等其他图形的手拉手模型

48. 2012年北京平谷区初三中考二模第24题 ★★★★★

如图 1，若四边形 $ABCD$ 、 $GFED$ 都是正方形，显然图中有 $AG = CE$ ， $AG \perp CE$ 。

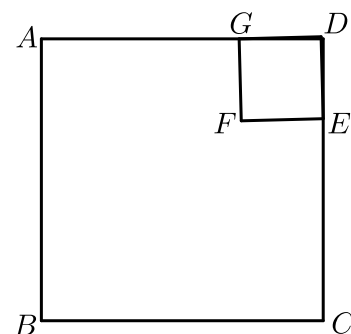


图 1

(1) 当正方形 $GFED$ 绕 D 旋转到如图 2 的位置时， $AG = CE$ 是否成立？若成立，请给出证明，若不成立，请说明理由。

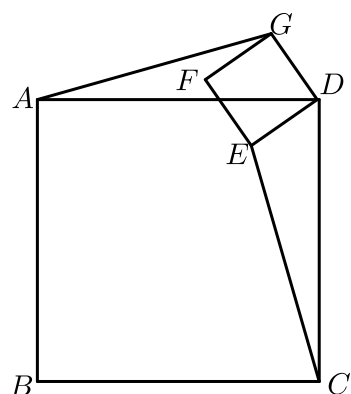
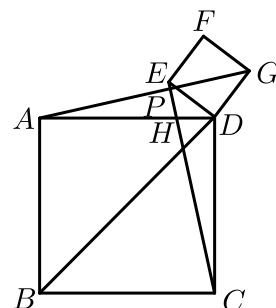


图 2

(2) 当正方形 $GFED$ 绕 D 旋转到 B, D, G 在一条直线 (如图 3) 上时，连结 CE ，设 CE 分别交 AG 、 AD 于 P 、 H 。



- ① 求证： $AG \perp CE$ 。
- ② 如果 $AD = 4$ ， $DG = \sqrt{2}$ ，求 CE 的长。

【答案】(1) $AG = CE$ 成立。

(2) ① 证明见解析.

② $CE = \sqrt{26}$.

【解析】(1) $AG = CE$ 成立.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 、四边形 $DEFG$ 是正方形,

$\therefore GD = DE, AD = DC.$

$\angle GDE = \angle ADC = 90^\circ.$

$\therefore \angle GDA = 90^\circ - \angle ADE = \angle EDC.$

$\therefore \triangle AGD \cong \triangle CED.$

$\therefore AG = CE.$

(2) ① 由(1)可知 $\triangle AGD \cong \triangle CED$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2.$

$\therefore \angle 3 = \angle 4, \angle 4 + \angle 2 = 90^\circ,$

$\therefore \angle 3 + \angle 1 = 90^\circ.$

$\therefore \angle APH = 90^\circ.$

$\therefore AG \perp CH.$

② 过 G 作 $GM \perp AD$ 于 M .

$\because BD$

是正方

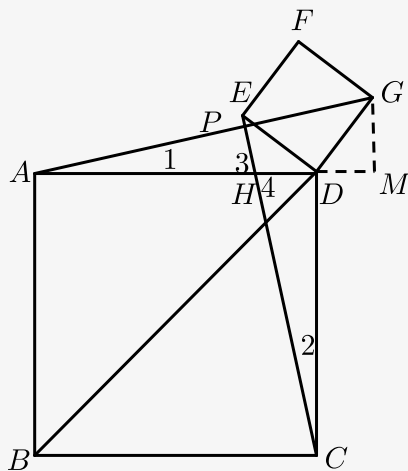
形

$ABCD$

的对角

线,

$\therefore$



$\angle ADB = \angle GDM = 45^\circ.$

$\therefore \angle DGM = 45^\circ.$

$\therefore DG = \sqrt{2},$

$\therefore MD = MG = 1.$

在 $\text{Rt}\triangle AMG$ 中, 由勾股定理, 得

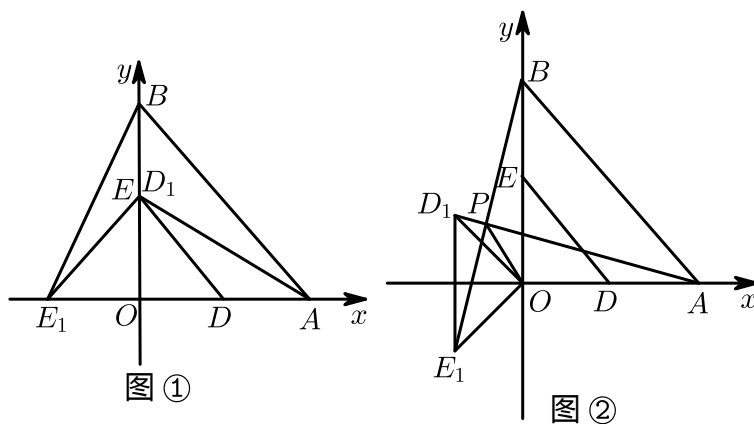
$AG = \sqrt{AM^2 + MG^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}.$

$\therefore CE = AG = \sqrt{26}.$

【标注】【知识点】正方形与全等综合

49. 2016年天津和平区初三中考二模第24题12分 ★★★★★

已知，在平面直角坐标系中， $A(4,0)$ ， $B(0,4)$ ，点 D 、 E 分别为 OA 、 OB 的中点，将 $\triangle ODE$ 绕点 O 逆时针旋转一定角度，得到 $\triangle OD_1E_1$ ，设旋转角为 α ，记直线 AD_1 与 BE_1 的交点为 P 。



(1) 如图①， $\alpha = 90^\circ$ ，则点 D_1 的坐标是 _____，线段 AD_1 的长等于 _____，点 E_1 的坐标是 _____，线段 BE_1 的长等于 _____。

(2) 如图②， $\alpha = 135^\circ$ 。

① 求 $\angle APO$ 的大小。

② 求 $\frac{PD_1}{PB}$ 的值。（直接写出结果即可）

【答案】 (1) $(0, 2)$ ； $2\sqrt{5}$ ； $(-2, 0)$ ； $2\sqrt{5}$

(2) ① 45° 。

② $\frac{PD_1}{PB} = \frac{1}{4}$ 。

【解析】 (1) 如图1， $\because$ 点 D 、 E 分别是 OA 、 OB 的中点，

$$\therefore OE = 2, OD = 2,$$

由旋转的性质可知： $OD_1 = OD = 2$ ， $OE_1 = OE = 2$ ，

$$\therefore D_1(0, 2), E_1(-2, 0),$$

$\therefore$ 由勾股定理可知： $AD_1 = 2\sqrt{5}$ ， $BE_1 = 2\sqrt{5}$ 。

(2) ① ①由旋转的性质可知： $\angle E_1OB = \angle D_1OA$ ，

在 $\triangle E_1OB$ 与 $\triangle D_1OA$ 中，

$$\begin{cases} OE_1 = OD_1 \\ \angle E_1OB = \angle D_1OA, \\ OB = OA \end{cases}$$

$\therefore \triangle E_1OB \cong \triangle D_1OA$ (SAS)，

$\therefore \angle BE_1O = \angle AD_1O$ ，

又 $\because \angle PCD_1 = \angle OCE_1$ ，

$\therefore \angle D_1PE_1 = \angle D_1OE_1 = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AOB = \angle APB = 90^\circ$ ，

$\therefore A、O、P、B$ 四点共圆，

$\therefore \angle APO = \angle OBA = 45^\circ$.

② 如图②， $\because \angle APO = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle D_1PO = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ ，

$\therefore \angle AOD_1 = 135^\circ$ ，

$\therefore \angle AOD_1 = \angle D_1PO$ ，

$\therefore \angle OD_1A = \angle OD_1A$ ，

$\therefore \triangle OD_1P \sim \triangle AD_1O$ ，

$\therefore \frac{OP}{AO} = \frac{D_1P}{D_1O}$ ，

$\because AO = 4, D_1O = 2$ ，

$\therefore \frac{OP}{4} = \frac{D_1P}{2}$ ，

$\therefore OP = 2D_1P$ ，

$\therefore \triangle E_1OB \cong \triangle D_1OA$ ，

$\therefore \angle OAD_1 = \angle OBE_1$ ，

$\therefore \angle BPO = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ ，

$\therefore \angle BPO = \angle AOD_1$ ，

$\therefore \triangle AOD_1 \sim \triangle BPO$ ，

$\therefore \frac{AO}{BP} = \frac{OD_1}{PO}$ ，

$\therefore BP = 2PO$ ，

$\therefore BP = 4PD_1$ ，

$\therefore \frac{PD_1}{PB} = \frac{1}{4}$.

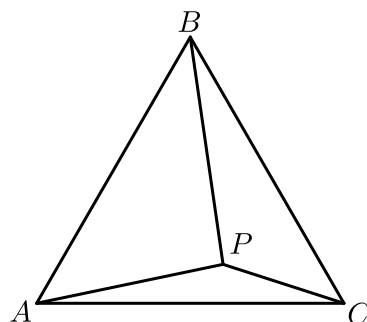
【标注】【知识点】旋转性质综合应用

2. “手拉手”模型逆用

练习10

50. ★★★

如图所示， P 是等边 $\triangle ABC$ 内部一点， $PC = 3$ ， $PA = 4$ ， $PB = 5$ ，求 $\triangle ABC$ 的边长.



【答案】 $\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.

【解析】 将 $\triangle APC$ 绕点 A 逆时针旋转 60° , 得到 $\triangle AQB$.

连接 PQ , 则 $\angle AQB = \angle APC$, $\angle PAQ = 60^\circ$,

$AQ = AP = 4$, $QB = PC = 3$, 故 $\triangle APQ$ 是等边三角形 ,

从而 $\angle AQP = 60^\circ$, $PQ = AP = 4$.

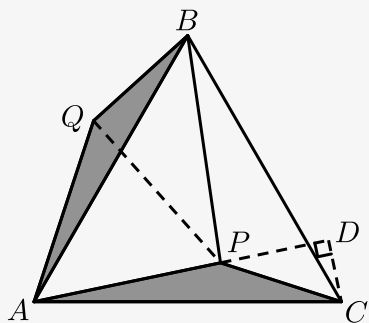
在 $\triangle PQB$ 中 , $PQ = 4$, $QB = 3$, $PB = 5$,

故 $\angle PQB = 90^\circ$, $\angle APC = \angle AQB = \angle AQP + \angle PQB = 150^\circ$.

过点 C 作 $CD \perp AP$, 交 AP 的延长线于点 D ,

则 $\angle CPD = 30^\circ$, $CD = \frac{1}{2}PC = \frac{3}{2}$, $PD = \sqrt{PC^2 - CD^2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

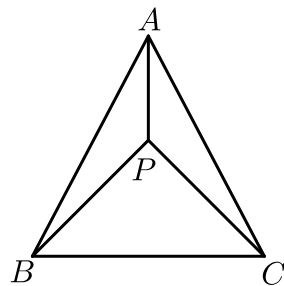
因此 , 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中 , $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{\left(4 + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.



【标注】 【知识点】 手拉手模型

51. ★★★★★

如图 , P 是等腰 $\triangle ABC$ 内一点 , $AB = BC$, 连接 PA , PB , PC .



(1) 如图 1 , 当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时 , 将 $\triangle PAB$ 绕 B 点顺时针旋转 90° , 画出旋转后的图形 .

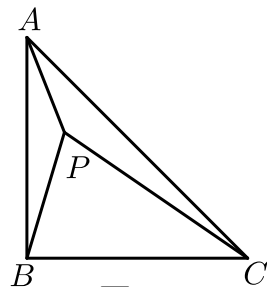


图1

(2) 在 (1) 中 , 若 $PA = 2$, $PB = 4$, $PC = 6$, 求 $\angle APB$ 的大小 .

- (3) 如图 2 , $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = AC$, 且 $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 5$, 则 $\triangle APC$ 面积是 _____ .

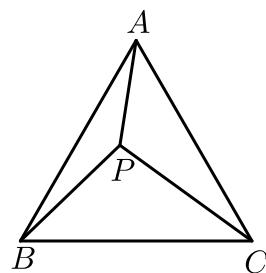


图2

- (4) 如图 3 , $\triangle ABC$ 中 , $\angle BAC = 60^\circ$, $AB = 2AC$. 点 P 在 $\triangle ABC$ 内 , 且 $PA = \sqrt{3}$, $PB = 5$, $PC = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 .

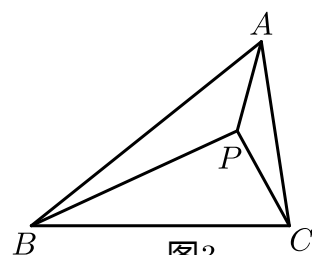


图3

【答案】 (1) 画图见解析 .

(2) 135° .

(3) $\frac{9\sqrt{3}}{4} + 3$

(4) $3 + \frac{7\sqrt{3}}{2}$.

【解析】 (1) 如图 1 所示 , $\triangle P'CB$ 即为所求 .

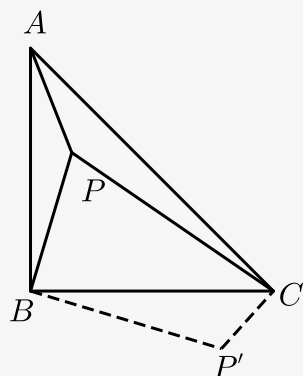


图1

(2) 如图 , 连结 PP' ,

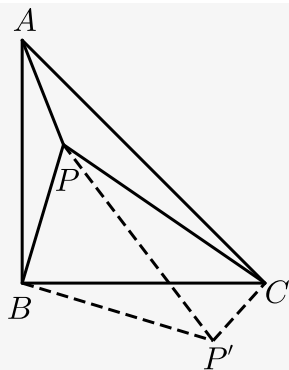


图1

$\therefore$ 将 $\triangle PAB$ 绕 B 点顺时针旋转 90° , 与 $\triangle PCB$ 重合 ,
 $\therefore \triangle PAB \cong \triangle P'CB$, $\angle PBP' = 90^\circ$,
 $\therefore BP = BP'$, $\angle APB = \angle CP'B$, $AP = CP' = 2$,
 $\therefore \triangle PBP'$ 是等腰直角三角形 ,
 $\therefore PP' = \sqrt{2}PB = 4\sqrt{2}$, $\angle BP'P = 45^\circ$.
 在 $\triangle CPP'$ 中 , $\because PP' = 4\sqrt{2}$, $CP' = 2$, $PC = 6$,
 $\therefore PP'^2 + CP'^2 = PC^2$,
 $\therefore \triangle CP'P$ 是直角三角形 , $\angle CP'P = 90^\circ$,
 $\therefore \angle CP'B = \angle BP'P + \angle CP'P = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$.

(3) 如图 3① , 将 $\triangle PAB$ 绕 A 点逆时针旋转 60° 得到 $\triangle P_1AC$, 连结 PP_1 ,

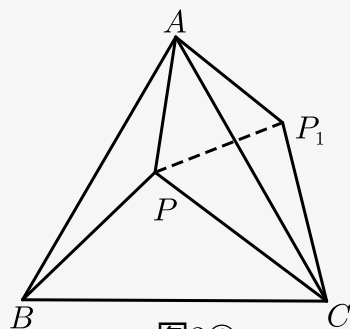


图3①

$\therefore \triangle APB \cong \triangle AP_1C$,
 $\therefore AP = AP_1$, $\angle PAP_1 = 60^\circ$, $CP_1 = BP = 4$,
 $\therefore \triangle PAP_1$ 是等边三角形 ,
 $\therefore PP_1 = AP = 3$,
 $\because CP = 5$, $CP_1 = 4$, $PP_1 = 3$,
 $\therefore PP_1^2 + CP_1^2 = CP^2$,
 $\therefore \triangle CP_1P$ 是直角三角形 , $\angle CP_1P = 90^\circ$,
 $\therefore S_{\triangle APP_1} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$, $S_{\triangle P_1PC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$,
 $\therefore S_{\text{四边形}APCP_1} = S_{\triangle APP_1} + S_{\triangle P_1PC} = \frac{9\sqrt{3}}{4} + 6$,
 $\because \triangle APB \cong \triangle AP_1C$,
 $\therefore S_{\triangle ABP} + S_{\triangle APC} = S_{\text{四边形}APCP_1} = \frac{9\sqrt{3}}{4} + 6$.

如图 3② ,

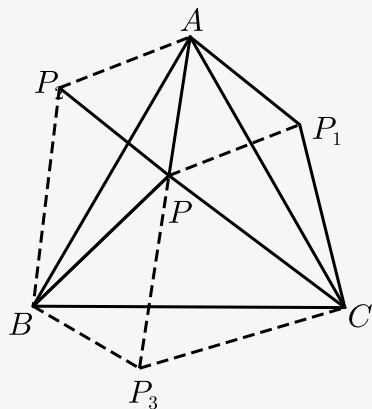


图3②

同理可求： $\triangle ABP$ 和 $\triangle BPC$ 的面积的和

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{4\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 4\sqrt{3} + 6$$

$\triangle APC$ 和 $\triangle BPC$ 的面积的和

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{25\sqrt{3}}{4} + 6 ,$$

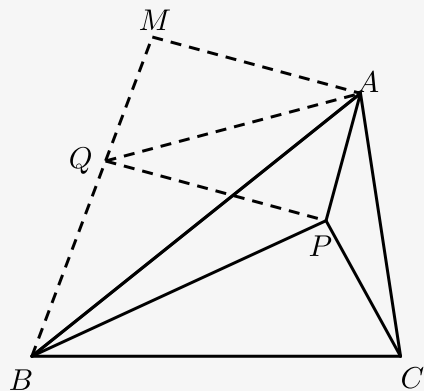
$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \left(\frac{9\sqrt{3}}{4} + 6 + 4\sqrt{3} + 6 + \frac{25\sqrt{3}}{4} + 6 \right) = \frac{25\sqrt{3}}{4} + 9$$

$\therefore \triangle APC$ 的面积 = $\triangle ABC$ 的面积 - $\triangle APB$ 与 $\triangle BPC$ 的面积的和

$$= \left(\frac{25\sqrt{3}}{4} + 9 \right) - (4\sqrt{3} + 6) = \frac{9\sqrt{3}}{4} + 3 .$$

故答案为 $\frac{9\sqrt{3}}{4} + 3$.

(4) 如图 , 作 $\triangle ABQ$, 使得 $\angle QAB = \angle PAC$, $\angle ABQ = \angle ACP$,



则 $\triangle ABQ \sim \triangle ACP$,

$\therefore AB = 2AC$,

$\therefore \triangle ABQ$ 与 $\triangle ACP$ 相似比为 2 .

$\therefore AQ = 2AP = 2\sqrt{3}$, $BQ = 2CP = 4$,

$\angle QAP = \angle QAB + \angle BAP = \angle PAC + \angle BAP = \angle BAC = 60^\circ$,

由 $AQ : AP = 2 : 1$ 知 , $\angle APQ = 90^\circ$, 于是 $PQ = \sqrt{3}AP = 3$,

$\therefore BP^2 = 25 = BQ^2 + PQ^2$, 从而 $\angle BQP = 90^\circ$

过 A 点作 $AM \parallel PQ$, 延长 BQ 交 AM 于点 M ,

$$\begin{aligned}
&\therefore AM = PQ, MQ = AP, \\
&\therefore AB^2 = AM^2 + (QM + BQ)^2 \\
&= PQ^2 + (AP + BQ)^2 = 28 + 8\sqrt{3}, \\
&\text{故 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 60^\circ \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8} AB^2 = \frac{6 + 7\sqrt{3}}{2} \\
&= 3 + \frac{7\sqrt{3}}{2}. \\
&\text{故答案为: } 3 + \frac{7\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】旋转类相似

52. ★★★★★

请回答下列各题

- (1) 如图1, 在正方形 $ABCD$ 内有一点 P , 且 $PA = \sqrt{5}$, $PB = \sqrt{2}$, $PC = 1$. 求 $\angle BPC$ 度的大小和正方形 $ABCD$ 的边长.

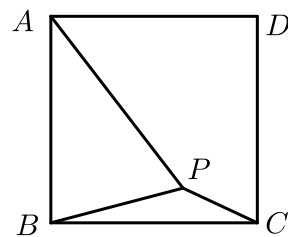


图 1

- (2) 如图2, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D 是 BC 上的任意一点, 探究: BD , CD 与 AD 的关系, 并证明你的结论.

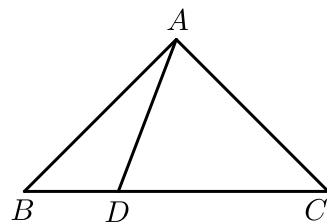


图 2

- (3) 如图3, 四边形 $ABCD$ 被对角线 BD 分为等腰直角 $\triangle ABD$ 和直角 $\triangle CBD$, 其中 $\angle A$ 和 $\angle C$ 都是直角, 另一条对角线 AC 的长度为 2, 求四边形 $ABCD$ 的面积.

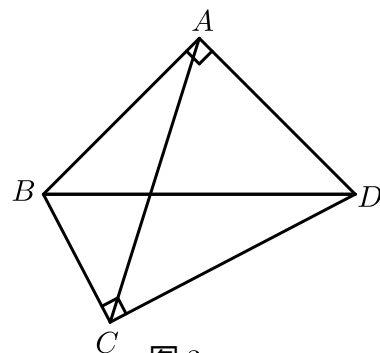


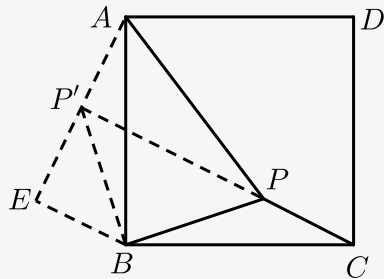
图 3

【答案】(1) $\angle BPC = 135^\circ$, 正方形边长为 $\sqrt{5}$.

(2) 证明见解析 .

(3) 2 .

【解析】(1) 如图, 将 $\triangle BPC$ 绕点 B 逆时针旋转 90° , 得 $\triangle BP'A$, 则 $\triangle BPC \cong \triangle BP'A$,



$$\therefore AP' = PC = 1, BP = BP' = \sqrt{2}, \angle P'BP = 90^\circ .$$

连接 PP' ,

$$\because BP = BP' = \sqrt{2}, \angle PBP' = 90^\circ ,$$

$$\therefore PP' = 2, \angle BP'P = 45^\circ .$$

$$\text{在 } \triangle AP'P \text{ 中, } AP' = 1, PP' = 2, AP = \sqrt{5},$$

$$\because 1^2 + 2^2 = (\sqrt{5})^2, \text{ 即 } AP'^2 + PP'^2 = AP^2 .$$

$$\therefore \triangle AP'P \text{ 是直角三角形, 即 } \angle AP'P = 90^\circ .$$

$$\therefore \angle AP'B = 135^\circ .$$

$$\therefore \angle BPC = \angle AP'B = 135^\circ .$$

过点 B 作 $BE \perp AP'$ 交 AP' 的延长线于点 E .

$$\therefore \angle EP'B = 45^\circ .$$

$$\therefore EP' = BE = 1 .$$

$$\therefore AE = 2 .$$

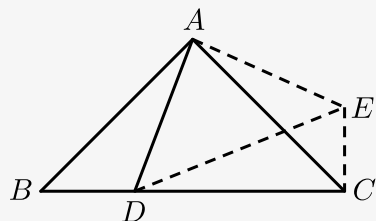
$$\therefore \text{在 Rt } \triangle ABE \text{ 中, 由勾股定理, 得 } AB = \sqrt{5} .$$

$$\therefore \angle BPC = 135^\circ, \text{ 正方形边长为 } \sqrt{5} .$$

(2) 探究得到的关系为: $BD^2 + CD^2 = 2AD^2$.

证明: 以 AC 为边向三角形外作 $\angle EAC = \angle DAB$, 且 $AE = AD$,

连接 DE 、 CE .



在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore BD = CE, \angle ABC = \angle ACE,$$

$$\because \angle BAD + \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle CAE + \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\text{即} \angle DAE = 90^\circ, \text{同理} \angle DCE = 90^\circ,$$

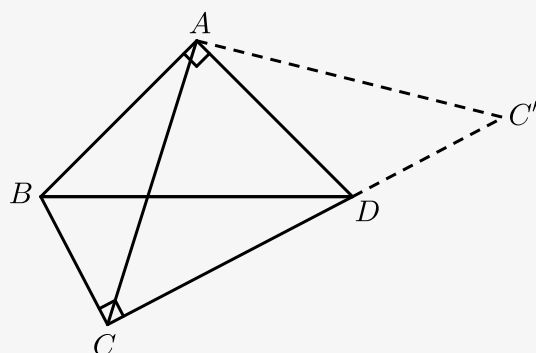
$$\therefore ED^2 = AD^2 + AE^2, ED^2 = CD^2 + CE^2,$$

$$\therefore AD^2 + AE^2 = CD^2 + CE^2.$$

$$\therefore AE = AD, CE = BD,$$

$$\therefore AD^2 + AD^2 = CD^2 + BD^2, \text{即} 2AD^2 = CD^2 + BD^2.$$

(3) 将三角形 ABC 绕 A 点逆时针旋转 90° , 使 B 与 D 重合, C 到 C' 点,



$$\text{则有} \angle CDC' = \angle ADC + \angle ADC' = \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ,$$

所以 C, D, C' 在同一条直线上,

$$\text{又因为} AC = AC'.$$

所以 $\triangle ACC'$ 是等腰直角三角形,

又四边形 $ABCD$ 的面积等于等腰直角 $\triangle ACC'$ 的面积.

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ACC'} = 2 \times 2 \div 2 = 2.$$

【标注】【知识点】手拉手模型